



第2章 函数及其性质

第1节 函数的概念及其表示



题型上分练

1. D 【解析】由 $x < 2$ 得 $2^x < 4$, 又 $2^x > 0$, 所以 $0 < 2^x < 4$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | 0 < x < 4\}$, 所以 $0 < x-1 < 4$, 因此 $1 < x < 5$, 故函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $\{x | 1 < x < 5\}$. 故选 D.

2. D 【解析】由题知 $f(x^2) = \sqrt{2-x^2} + \frac{1}{x^2-1}$, 由 $2-x^2 \geq 0$ 且 $x^2-1 \neq 0$, 得 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 且 $x \neq \pm 1$, 所以函数 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$. 故选 D.

一题多解 依题意, $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \leq 2 \text{ 且 } x \neq 1\}$, 所以 $f(x^2)$ 中的 x^2 需要满足 $x^2 \leq 2$ 且 $x^2 \neq 1$, 所以函数 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$.

3. B 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2]$, 所以要使函数 $g(x)$ 有意义, 则 $\begin{cases} 0 < x-1 \leq 2, \\ x-2 > 0, \end{cases}$ 解得 $2 < x \leq 3$, 所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $(2, 3]$.

4. A 【解析】由 $4x-x^2 > 0$, 得 $x^2-4x < 0$, 所以 $x(x-4) < 0$, 解得 $0 < x < 4$, 故函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$ 的定义域为 $(0, 4)$.
由 $\begin{cases} 0 < 2^x < 4, \\ x+1 > 0 \end{cases}$ (易错: 不要忽视对数函数的定义域), 解得 $-1 < x < 2$, 所以 $g(x) = f(2^x) + \log_2(x+1)$ 的定义域为 $(-1, 2)$. 故选 A.

5. B 【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以 $ax^2-ax+\frac{1}{2} \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

当 $a=0$ 时, 不等式为 $\frac{1}{2} \geq 0$, 满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = a^2 - 2a \leq 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq 2$, 故实数 a 的取值范围为 $[0, 2]$. 故选 B.

6. B 【解析】对于 A, 因为 $x \in \mathbf{R}$, 所以 $x^2-1 \in [-1, +\infty)$, 所以 $0.5^{x^2-1} \in (0, 2]$, 即 $y=0.5^{x^2-1}$ 的值域为 $(0, 2]$, 故 A 错误;

对于 B, $y = \frac{1+2x^2}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2)-1}{1+x^2} = 2 - \frac{1}{1+x^2}$, 因为 $x \in \mathbf{R}$, 所以 $x^2+1 \in [1, +\infty)$, 所以 $\frac{1}{1+x^2} \in (0, 1]$, 所以 $2 - \frac{1}{1+x^2} \in [1, 2)$,

即 $y = \frac{1+2x^2}{1+x^2}$ 的值域为 $[1, 2)$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $x^2-2x+101 = (x-1)^2+100 \geq 100$, 所以 $\lg(x^2-2x+101) \geq \lg 100 = 2$, 即 $y = \lg(x^2-2x+101)$ 的值域为 $[2, +\infty)$, 故 C 错误;

对于 D, $\cos 2x+4\sin x-1 = 1-2\sin^2 x+4\sin x-1 = -2(\sin x-1)^2+2$, 因为 $\sin x \in [-1, 1]$, 所以 $\cos 2x+4\sin x-1 = -2(\sin x-$



$1)^2+2 \in [-6, 2]$, 即 $y = \cos 2x + 4\sin x - 1$ 的值域为 $[-6, 2]$, 故 D 错误. 故选 B.

一题多解

对于 B, 根据 $y = \frac{1+2x^2}{1+x^2}$, 可得 $y + yx^2 = 1 + 2x^2$, 即

$$(2-y)x^2 + 1 - y = 0, \text{ 则 } \begin{cases} 2-y \neq 0, \\ \Delta = -4(2-y)(1-y) \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } 1 \leq y < 2,$$

即 $y = \frac{1+2x^2}{1+x^2}$ 的值域为 $[1, 2)$, 故 B 正确.

7. A 【解析】 $f(x) = |x| + |x-2| + |x-4| + |x-6| + |x-8|$,

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -x + 2 - x + 4 - x + 6 - x + 8 - x = -5x + 20$;

当 $0 < x \leq 2$ 时, $f(x) = x + 2 - x + 4 - x + 6 - x + 8 - x = -3x + 20$;

当 $2 < x \leq 4$ 时, $f(x) = x + x - 2 + 4 - x + 6 - x + 8 - x = -x + 16$;

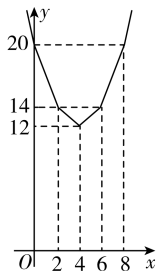
当 $4 < x \leq 6$ 时, $f(x) = x + x - 2 + x - 4 + 6 - x + 8 - x = x + 8$;

当 $6 < x \leq 8$ 时, $f(x) = x + x - 2 + x - 4 + x - 6 + 8 - x = 3x - 4$;

当 $x > 8$ 时, $f(x) = x + x - 2 + x - 4 + x - 6 + x - 8 = 5x - 20$.

作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示, $f(x)$ 在 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 在 $[4, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x = 4$ 时, $f(x)$ 取最小值 $f(4) = -4 + 16 = 12$. 故选 A.



8. D 【解析】因为 $f(x) = \frac{x^2+1}{2-x^2}$, 所以 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{2x^2-1}$, 所以 $\frac{1}{f(x)} +$

突破点

$\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$. 设 $t = f(x) = \frac{x^2+1}{2-x^2} = -1 + \frac{3}{2-x^2}$, 由 $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \sqrt{2}$, 可得

$0 < 2-x^2 < \frac{3}{2}$, 则 $\frac{3}{2-x^2} > 2$, 所以 $t > 1$, $t-1 > 0$, 所以 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) =$

$t + \frac{t}{t-1} = \frac{t^2-t+t}{t-1} = \frac{(t-1)^2+2(t-1)+1}{t-1} = t-1 + \frac{1}{t-1} + 2 \geq 2+2=4$, 当

且仅当 $t-1=1$, 即 $t=2$, $x=1$ 时等号成立. 故选 D.

9. BCD 【解析】对于 A, $f(x) = \frac{3+x}{4-x} = \frac{-(4-x)+7}{4-x} = -1 + \frac{7}{4-x}$, 由

于 $\frac{7}{4-x} \neq 0$, 所以 $f(x) \neq -1$, 所以 $|f(x)| \in [0, +\infty)$, 故不存在

正数 M , 使得对任意 $x \in A$, $|f(x)| \leq M$ 成立, 故 A 错误.

对于 B, $f(x) \in [0, 1]$, 故存在正数 1, 使得对任意 $x \in A$, $|f(x)| \leq 1$ 成立, 故 B 正确.

对于 C, 令 $u = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, 易得 $u \geq 1$, 所以 $0 < f(x) \leq 5$, 即 $f(x) \in (0, 5]$, 故存在正数 5, 使得对任意 $x \in A$, $|f(x)| \leq 5$ 成立, 故 C 正确.

对于 D, 令 $t = \sqrt{4-|x|}$, 则 $t \in [0, 2]$, $|x| = 4-t^2$, 设 $g(t) = -t^2 + t + 4 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$ ($t \in [0, 2]$), 易得 $2 \leq g(t) \leq \frac{17}{4}$, 则

$2 \leq f(x) \leq \frac{17}{4}$, 所以 $|f(x)| \in \left[2, \frac{17}{4}\right]$, 故存在正数 $\frac{17}{4}$, 使得对



任意 $x \in A$, $|f(x)| \leq \frac{17}{4}$ 成立, 故 **D 正确**. 故选 BCD.

一题多解

对于 A, 令 $y = \frac{3+x}{4-x}$, 可得 $(y+1)x = 4y-3$, $y \neq -1$, 故 $x = \frac{4y-3}{y+1}$, 根据定义域可得 $\frac{4y-3}{y+1} \neq 4$, 即 $\frac{-7}{y+1} \neq 0$ 恒成立, 所以 $f(x) \neq -1$, 即 $|f(x)| \in [0, +\infty)$, 故不存在正数 M , 使得对任意 $x \in A$, $|f(x)| \leq M$ 成立, 故 A 错误.

10.4 【解析】由函数 $f(x) = \log_2(kx^2+kx+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 得 $y =$

关键点

kx^2+kx+1 的值域包含 $(0, +\infty)$,

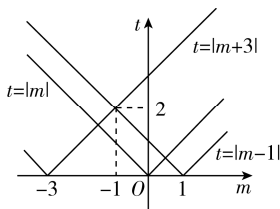
当 $k=0$ 时, $y=1$ 显然不满足题意, 故 $k \neq 0$,

函数 $y=kx^2+kx+1$, 图象开口向上, 且与 x 轴有公共点, 故

$$\begin{cases} k > 0, \\ \Delta = k^2 - 4k \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } k \geq 4, \text{ 所以实数 } k \text{ 的最小值为 } 4.$$

11.2 【解析】 $|m+n-2\sqrt{n}| = |(\sqrt{n}-1)^2+m-1|$ 在 $n \in [0, 9]$ 时的最大值只可能在 $n=0$ 或 $n=1$ 或 $n=9$ 处取得 (提示: 将 n 看作自变量, m 看作参数). 令 $t = |(\sqrt{n}-1)^2+m-1|$, 当 $n=0$ 时, $t = |m|$; 当 $n=1$ 时, $t = |m-1|$; 当 $n=9$ 时, $t = |m+3|$.

原式转化为求 $\min_{m \in [-3, 3]} \{ \max \{ |m|, |m-1|, |m+3| \} \}$ (提示: 转化为单变量问题), 作出 $t = |m|$, $t = |m-1|$, $t = |m+3|$ 的大致图象, 由图可知, 当 $m \in [-3, 3]$ 时, $\min_{m \in [-3, 3]} \{ \max \{ |m|, |m-1|, |m+3| \} \} = 2$, 即原式的值为 2.



12. D 【解析】若两个函数定义域和对应关系都相同, 则为相同函数.

对于 A, 易知 $f(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ 的定义域为 $\{x | x \neq \sqrt{2}\}$, 而 $g(x) =$

$x+\sqrt{2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 两个函数的定义域不同, 不是同一个函数, 故 **A 错误**;

对于 B, $f(x) = \frac{1}{2} \log_3 x^2$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 而函数 $g(x) = \log_3 x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 两个函数定义域不同, 不是同一个函数, 故 **B 错误**;

对于 C, 两个函数的定义域均为 $\mathbf{R}$, 但 $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 而 $g(x) = x$, 两个函数的对应关系不同, 不是同一个函数, 故 **C 错误**;

对于 D, 易知 $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^3} = x-1$ 与 $g(x) = x-1$ 的定义域和对应关系均相同, 是同一个函数, 故 **D 正确**. 故选 D.

13. B 【解析】因为函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x+ax}$ 的图象经过点 $P\left(p, \frac{6}{5}\right)$, $Q\left(q, -\frac{1}{5}\right)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2^p}{2^p+ap} = \frac{6}{5}, \\ \frac{2^q}{2^q+aq} = -\frac{1}{5}, \end{cases} \quad \text{整理得 } \begin{cases} 1 + \frac{ap}{2^p} = \frac{5}{6}, \\ 1 + \frac{aq}{2^q} = -5 \end{cases} \quad (\text{提示: 两边同时取})$$



倒数), 即
$$\begin{cases} \frac{ap}{2^p} = -\frac{1}{6}, \\ \frac{aq}{2^q} = -6, \end{cases}$$

所以 $\frac{a^2 pq}{2^{p+q}} = 1$, 又 $2^{p+q} = 36pq$, 代入得 $a^2 = 36$, 解得 $a = \pm 6$,

又 $a > 0$, 所以 $a = 6$. 故选 B.

14. A 【解析】记 $y = f(x) + \frac{2}{x}$, 则 $f(x)f(y) = 1$ ①.

用 y 替换 $f(x) \cdot f\left[f(x) + \frac{2}{x}\right] = 1$ 中的 x 得 $f(y)f\left[f(y) + \frac{2}{y}\right] =$

1 ②, 故由 ①② 得 $f\left[f(y) + \frac{2}{y}\right] = f(x)$. 又因为 $f(x)$ 在定义域

$(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(y) + \frac{2}{y} = x$, 将 $y = f(x) + \frac{2}{x}$ 及 ①

式代入整理得 $\frac{x^2 f(x)}{xf(x) + 2} = \frac{1}{f(x)}$, 即 $[xf(x) + 1][xf(x) - 2] = 0$,

解得 $f(x) = -\frac{1}{x}$ 或 $f(x) = \frac{2}{x}$, 又函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,$

$+\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x) = \frac{2}{x}$ 满足题意.

所以 $y = f(2^x - 4^x) = \frac{2}{2^x - 4^x} = \frac{2}{-\left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}, x < 0$, 当 $2^x =$

$\frac{1}{2}$, 即 $x = -1$ 时, 函数 $y = f(2^x - 4^x)$ 取到最小值, 最小值是 8.

故选 A.

15. 1 【解析】因为函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + a} (x \neq 0)$ 满足 $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$,

所以 $\frac{x}{x^2 + a} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + a} = \frac{x}{1 + ax^2}$, 即 $1 + ax^2 = x^2 + a$, 所以 $(a - 1)(x^2 -$

$1) = 0$, 因为 $x^2 - 1$ 不恒为 0, 所以 $a - 1 = 0$, 解得 $a = 1$, 经检验, 符合题意.

16. A 【解析】当 $x < 1$ 时, $f(x) = 2^x - 2$ 单调递增, $f(x) \in (-2, 0)$;

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 \in [-1, +\infty)$.

综上所述, $f(x)$ 的值域是 $(-2, +\infty)$.

17. A 【解析】分别求方程的根, 然后相加. 若 $x < 0$, 由 $x^2 - 2x = 8$ 得 $(x + 2)(x - 4) = 0$, 所以 $x = -2$ 或 $x = 4$ (舍去); 若 $x \geq 0$, 由 $2^x = 8$ 得 $x = 3$. 因为 $-2 + 3 = 1$, 所以方程 $f(x) = 8$ 的所有根之和为 1. 故选 A.

18. D 【解析】当 $x \geq 0$ 时, $\frac{1}{2}x - 1 = x + 1$, 解得 $x = -4$ (舍去); 当

$x < 0$ 时, $\frac{2}{x} = x + 1$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 1$ (舍去). 综上, 函数

$f(x)$ 的“+1 点”为 -2. 故选 D.

19. C 【解析】由对勾函数的单调性可知, 函数 $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $(0,$

$2)$ 上单调递减, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 所以函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 在



$[a, +\infty)$ 上单调递增, 则 $[a, +\infty) \subseteq [2, +\infty)$, 即 $a \geq 2$.

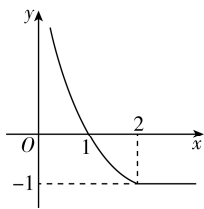
又因为 $x < a$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{4}x + 4$ 单调递增, 且函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

所以 $\frac{1}{4}a + 4 \leq a + \frac{4}{a}$, 又 $a \geq 2$, 则 $(3a - 4)(a - 4) \geq 0$, 解得 $a \geq 4$, 故 a 的最小值为 4.

20. A 【解析】函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x, & 0 < x \leq 2, \\ -1, & x > 2, \end{cases}$

函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示, 则由 $f(x+1) < f(3x)$ 可得

$$\begin{cases} 0 < 3x, \\ 3x < x+1, \\ 3x < 2, \end{cases} \text{解得 } 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ 故选 A.}$$



21. C 【解析】易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, m]$ 上单调递增, 在 $(m, 15]$ 上单调递增,

当 $x \leq m$ 时, $f(x) \in (1, 2^m + 1]$, 当 $m < x \leq 15$ 时, $f(x) \in (\log_2(m+1), 4]$,

因为 $f(x)$ 的值域是 $(1, 4]$, 所以 $\begin{cases} 2^m + 1 \leq 4, \\ \log_2(m+1) \geq 1, \end{cases}$ 解得 $1 \leq$

$m \leq \log_2 3$, 即实数 m 的取值范围是 $[1, \log_2 3]$. 故选 C.

22. -1 【解析】 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\log_3 \frac{1}{3}\right) = f(-1) = (-1)^{2^{0.25}} = -1$.

23. $\frac{1}{e}$ 【解析】因为 $f(0) = e^0 = 1$, $f(0) + f(a) = 0$, 所以 $f(a) = -1$, 因为 $e^x > 0$, 所以 $a > 0$ 且 $\ln a = -1$, 解得 $a = \frac{1}{e}$.

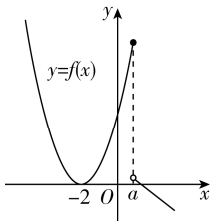
24. $[-2, 0)$ 【解析】当 $m+1 < 1$, 即 $m < 0$ 时, 由 $f(m+1) \leq 1$, 得 $(m+1)^2 \leq 1$, 解得 $-2 \leq m < 0$;

当 $m+1 \geq 1$, 即 $m \geq 0$ 时, 由 $f(m+1) \leq 1$, 得 $m+1+1 \leq 1$, 解得 $m \leq -1$, 与 $m \geq 0$ 矛盾, 不符合题意.

综上, m 的取值范围是 $[-2, 0)$.

25. $(1, +\infty)$ 【解析】当 $x > 4$ 时, $f(x) = \log_2 x$, 此时 $f(x) > \log_2 4 = 2$, 故当 $x \leq 4$ 时, 有 $6^a - x > 2$ 恒成立, 即 $6^a > 2+x$ 在 $x \leq 4$ 时恒成立, 即 $6^a > 6$, 即 $a > 1$.

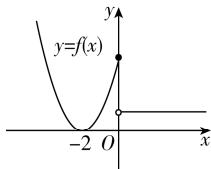
26. -1 (答案不唯一, 满足 $a \in [-1, 0]$ 均可) -1 【解析】当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的大致图象如图①所示, 不满足题意.



图①

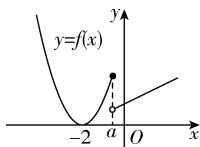


当 $a=0$ 时, 函数 $f(x)$ 的大致图象如图②所示, 符合题意.



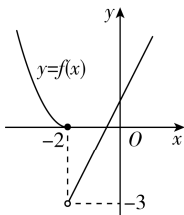
图②

当 $-2 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的大致图象如图③所示, 要使 $f(x)$ 有最小值, 需满足 $-a^2 + 1 \geq 0$, 所以 $-1 \leq a < 0$.



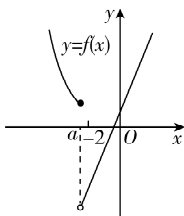
图③

当 $a = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 的大致图象如图④所示, 不满足题意.



图④

当 $a < -2$ 时, 函数 $f(x)$ 的大致图象如图⑤所示, 要使函数有最小值, 需满足 $(a+2)^2 \leq -a^2 + 1$, 无解, 故不满足题意.



图⑤

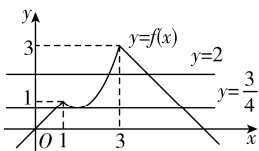
综上所述, a 的取值范围为 $[-1, 0]$, 最小值为 -1 .

27. $\frac{3+2\sqrt{5}}{4}$ 【解析】先确定函数的解析式, 作出函数图象, 结合图象分析.

令 $x^2 - 3x + 3 = -|x - 3| + 3$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 3$.

由题意可得, 当 $x \leq 1$ 或 $x \geq 3$ 时, $f(x) = -|x - 3| + 3$, 当 $1 < x < 3$ 时, $f(x) = x^2 - 3x + 3$,

即 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ x^2 - 3x + 3, & 1 < x < 3, \\ -x + 6, & x \geq 3, \end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图象如图所示.



当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x$, 令 $f(x) = \frac{3}{4}$, 解得 $x = \frac{3}{4}$, 令 $f(x) = 2$, 无解;



当 $1 < x < 3$ 时, $f(x) = x^2 - 3x + 3$, 令 $f(x) = \frac{3}{4}$, 解得 $x = \frac{3}{2}$, 令

$$f(x) = 2, \text{ 解得 } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

当 $x \geq 3$ 时, $f(x) = -x + 6$, 令 $f(x) = \frac{3}{4}$, 解得 $x = \frac{21}{4}$, 令 $f(x) = 2$, 解得 $x = 4$.

分析: 由图象可知使 $f(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$ 的图象有两段, 可以分类讨论求得 $n-m$ 的最大值.

由图可知, 当 $m \in \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$, $n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时, $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$,

$$\text{此时 } n-m \text{ 的最大值为 } \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3+2\sqrt{5}}{4};$$

当 $m = 4$, $n = \frac{21}{4}$ 时, $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$, 此时 $n-m = \frac{5}{4}$,

因为 $\frac{3+2\sqrt{5}}{4} > \frac{5}{4}$, 所以 $n-m$ 的最大值为 $\frac{3+2\sqrt{5}}{4}$.

第2节 函数的基本性质



题型上分练

1. B 【解析】 $y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, **A** 错误;

因为 $x^2 + 1 \geq 1$, 所以 $y = \lg(x^2 + 1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 又 $y = \lg t$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $t = x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以 $y = \lg(x^2 + 1)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, **B** 正确;

$y = 3^{|x-1|}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 又 $y = 3^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $t = |x-1|$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 所以 $y = 3^{|x-1|}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, **C** 错误;

$y = \frac{x-2}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 但在区间 $(0, +\infty)$ 上不单调递增, **D** 错误. 故选 **B**.

2. C 【解析】函数 $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $y = \log_a x$ ($a > 1$) 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $\log_2 0.2 < \log_2 1 = 0 = \log_{0.2} 1 < \log_{0.2} 0.3 < \log_{0.2} 0.2 = 1 = \log_{0.3} 0.3 < \log_{0.3} 0.2$.

$t = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增且恒为正数, 而 $y = t - \frac{1}{t}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

由复合函数的单调性可知 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以 $f(\log_2 0.2) < f(\log_{0.2} 0.3) < f(\log_{0.3} 0.2)$, 即 $a < c < b$.

3. C 【解析】由题意知, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)$ 为奇函数, 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $g(0) = 0$. 设 $0 \leq x_1 < x_2$, 则 $g(x_2) < g(x_1) \leq 0$, $f(g(x_2)) > f(g(x_1))$, 所以 $f(g(x))$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 故 **A** 错误;



设 $x_1 < x_2 \leq 0$, 则 $g(x_1) > g(x_2)$, $g(g(x_1)) < g(g(x_2))$, 所以 $g(g(x))$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 故 **B** 错误;

设 $0 \leq x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$, $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$, 所以 $g(f(x))$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 故 **C** 正确;

取 $f(x) = x^2 - 1$, 则 $f(f(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1$, $f(f(0)) = 0$, $f(f(-1)) = -1$, 此时 $f(f(x))$ 在 $(-\infty, 0]$ 上不单调递减, 故 **D** 错误. 故选 **C**.

4. D 【解析】当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = -x^2 - ax + 1$, 且 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,

$$\text{所以 } f(x) \text{ 为定义在 } \mathbf{R} \text{ 上的减函数, 则 } \begin{cases} a-7 < 0, \\ a > 0, \\ \frac{1}{2}(a-7) \geq 2a-6, \\ -\frac{a}{2} \leq 2, \\ \frac{1}{2}a-6 \geq -4-2a+1 \end{cases} \quad (\text{提})$$

示: 分段函数在定义域内单调递减, 需要每段都单调递减, 且在分段点处的函数值满足单调性条件), 解得 $\frac{6}{5} \leq a \leq \frac{5}{3}$. 故

选 **D**.

5. A 【解析】从题干上来看, 无论已知条件中的“2”还是问题中的“4”都是多余的, 因此考虑构造函数 $g(x) = f(x) - 2$ 解决问题.

设 $g(x) = f(x) - 2 = 2^x - 2^{-x}$, 由 $y = 2^x$, $y = -2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 可知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $g(-x) = 2^{-x} - 2^x = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数 (记忆: 常见的奇函数).

所以由 $f(x \ln x) + f(-x^2 - ax) > 4$, 可得 $g(x \ln x) + g(-x^2 - ax) > 0$, 即 $g(x \ln x) > g(x^2 + ax)$, 即 $x \ln x > x^2 + ax (x > 0)$,

转化为 $a < \ln x - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解.

设 $h(x) = \ln x - x (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{x}$, 易知 $x \in (0, 1)$ 时,

$h'(x) > 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,

所以 $h(x) = \ln x - x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $h(x)_{\max} = h(1) = -1$, 所以 $a < -1$, 故选 **A**.

6. D 【解析】易知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f(0+1) = f(1) = e^2 + e^{-4} \neq 0$, 故 **A** 错误;

$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = e^2 + e^{-4}$, $f\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 + e^{-2}$, 则 $f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \neq$

$f\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$, 故 **B** 错误;

$f(0-1) = f(-1) = e^{-2} + 1 \neq 0$, 故 **C** 错误;

$f\left(x - \frac{1}{2}\right) = e^{2x-1} + e^{-2x-1}$, $f\left(-x - \frac{1}{2}\right) = e^{-2x-1} + e^{2x-1}$, 则 $f\left(x - \frac{1}{2}\right) =$

$f\left(-x - \frac{1}{2}\right)$, 故 **D** 正确. 故选 **D**.

7. B 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \left(2^{-x} - \frac{a}{2^x}\right) \cdot \cos(-x) =$

$\left(-a \cdot 2^x + \frac{1}{2^x}\right) \cos x$, $\therefore f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-x) = f(x)$, 则

$-a = 1$, 解得 $a = -1$. 故选 **B**.

8. C 【解析】因为函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x \geq 0, \\ b - \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 0 \end{cases}$ 为奇函数,



当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $f(-x) = 2^{-x} - a = -f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - b$, 所以 $a = b$,

又 $f(0) = 1 - a = 0$ (提示: 若奇函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有意义, 则 $f(0) = 0$, 常用此条件求参数的值), 则 $a = b = 1$, 即 $a + b = 2$. 故选 C.

9. A 【解析】当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{2}$,

因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $0 \leq x \leq 1$;

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$,

因为 $y = f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x) = f(-x) = 2^x$, $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

由 $f(x) = 2^x \geq \frac{1}{2} = 2^{-1}$, 得 $-1 \leq x < 0$.

综上, $f(x) \geq \frac{1}{2}$ 的解集为 $[-1, 1]$. 故选 A.

10. $f(x) = -x$ 【解析】因为 $f(x) - g(x) = x^2 - x$, ①

且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x) - g(-x) = -f(x) - g(x) = x^2 + x$. ②

由①②解得 $f(x) = -x$.

11. 4 【解析】 $f(x) = \frac{2(x+1)^2}{x^2+1} = \frac{2x^2+4x+2}{x^2+1} = \frac{4x}{x^2+1} + 2$, 令 $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $x \in [-2.025, 2.025]$, 则 $f(x) = g(x) + 2$.

又因为 $g(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-4x}{x^2+1} = -g(x)$, 所以函数 $g(x)$ 为

奇函数, 所以 $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$, 所以 $M + m = g(x)_{\max} + 2 + g(x)_{\min} + 2 = 4$.

12. C 【解析】因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 3 的偶函数, 且当 $0 < x \leq \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = \log_4 x$, 所以 $f\left(-\frac{13}{2}\right) = f\left(\frac{13}{2}\right) = f\left(6 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_4 \frac{1}{2} = \log_4 4^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$. 故选 C.

13. C 【解析】因为曲线 $y = \ln \frac{x}{2+x} - x + a$ 关于点 $(-1, 0)$ 中心对称, 所以 $f(-2-x) + f(x) = 0$, 所以 $\ln \frac{-x-2}{-x} - (-2-x) + a + \ln \frac{x}{x+2} - x + a = 0$, 可得 $a = -1$. 故选 C.

14. C 【解析】易知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

对于选项 A: $f(-x) = \frac{1}{1+2^{-x}} \neq -f(x)$, 则 $f(x)$ 不是奇函数, 故

A 错误;

对于选项 B: $f(-x) = \frac{1}{1+2^{-x}} \neq f(x)$, 则 $f(x)$ 不是偶函数, 故 B

错误;

对于选项 C: $f(x) + f(-x) = \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}} = \frac{1+2^x}{1+2^x} = 1$, 故 $f(x)$ 的

图象关于点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 中心对称, 故 C 正确;



对于选项 D: $f(1-x) = \frac{1}{1+2^{1-x}} \neq f(x)$, 则 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 故 D 错误. 故选 C.

刷有所得

(1) 若函数 $f(x) = \frac{1}{a^x + 1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则其图象的对称中心为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

(2) 若函数 $f(x) = \frac{1}{a^x - 1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则其图象的对称中心为 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$;

(3) 若函数 $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则其图象的对称中心为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

(4) 若函数 $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt[n]{a}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则其图象的对称中心为 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$;

(5) 若函数 $f(x) = \frac{a^r}{a^x + a^r}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则其图象的对称中心为 $\left(r, \frac{1}{2}\right)$;

(6) 若函数 $f(x) = \frac{-a^r}{a^x - a^r}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则其图象的对称中心为 $\left(r, \frac{1}{2}\right)$.

15. D 【解析】 $f(x) = e^x - e^{-x} + \sin x + 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(0) = 1$.

因为 $f(x) + f(-x) = (e^x - e^{-x} + \sin x + 1) + [e^{-x} - e^x + \sin(-x) + 1] = 2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称.

所以 $f(-2\ 023) + f(-2\ 022) + \cdots + f(2\ 022) + f(2\ 023) = 2 \times 2\ 023 + f(0) = 4\ 047$. 故选 D.

16. B 【解析】题设为求 $f(2\ 024) + f(2\ 025) + f(2\ 026)$ 的值, 由于自变量均为较大的值, 所以考虑函数的周期性. 因为 $f(x+1)$ 是偶函数, 所以 $f(x+1) = f(-x+1)$, 所以 $f(x+2) = f(-x)$, 即 $f(2) = f(0) = 0$,

又因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 即 $f(x+2) = -f(x)$, 所以 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 所以 4 为 $f(x)$ 的一个周期,

则 $f(2\ 024) = f(506 \times 4) = f(0) = 0$, $f(2\ 025) = f(506 \times 4 + 1) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$,

$f(2\ 026) = f(506 \times 4 + 2) = f(2) = f(0) = 0$, 所以 $f(2\ 024) + f(2\ 025) + f(2\ 026) = 2$. 故选 B.

17. ABD 【解析】遇到不常见的函数形式, 确定函数的周期性, 图象的对称性时, 可以直接利用定义或者性质的相关公式来验证.

对于 A, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f(-x) = \sqrt{|\cos(-2x)|} + \sqrt{|\sin(-2x)|} = \sqrt{|\cos 2x|} + \sqrt{|\sin 2x|} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确.



$$\text{对于 B, 因为 } f\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sqrt{\left|\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]\right|} + \sqrt{\left|\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]\right|} = \sqrt{|\sin 2x|} + \sqrt{|\cos 2x|},$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sqrt{\left|\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\right|} + \sqrt{\left|\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\right|} = \sqrt{|\sin 2x|} + \sqrt{|\cos 2x|},$$

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 故 **B 正确**.

对于 C, 因为 $f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2^{\frac{3}{4}} > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上不单调, 故 **C 错误**.

对于 D, 因为 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sqrt{|\sin 2x|} + \sqrt{|\cos 2x|} = f(x)$, 所以 $\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的一个周期,

则 $f(x)$ 的最大值即为 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x) = \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\sin 2x}$, 则 $[f(x)]^2 = \sin 2x + \cos 2x + 2\sqrt{\sin 2x \cos 2x}$.

设 $t = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in [1, \sqrt{2}]$,

则 $\sin 2x \cos 2x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

设函数 $g(t) = t + \sqrt{2(t^2 - 1)}$, $t \in [1, \sqrt{2}]$,

可知函数 $g(t) = t + \sqrt{2(t^2 - 1)}$ 在 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递增, 所以 $g(t) \in [1, 2\sqrt{2}]$,

即 $[f(x)]^2 \in [1, 2\sqrt{2}]$, 所以 $f(x) \in [1, 2^{\frac{3}{4}}]$, 即 $f(x)$ 的最大值是 $2^{\frac{3}{4}}$, 故 **D 正确**. 故选 ABD.

18. BCD 【解析】对于 A, 易知 $f(x) = 2\sin x$ 的最大值 $m = 2$, 最小值 $n = -2$, 则 $m - n = 4$, 故 **A 错误**;

对于 B, 因为 $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ 在 $\left[\frac{2}{5}, 2\right]$ 上单调递减, 所以

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ 的最大值 $m = \frac{7}{2}$, 最小值 $n = \frac{3}{2}$, 则 $m - n = 2$, 故 **B 正确**;

对于 C, $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x} = \sqrt{-(x-2)^2 + 4}$, 令 $u = -(x-2)^2 + 4$, $y = \sqrt{u}$, 当 $x \in [0, 4]$ 时, $u \in [0, 4]$, 又 $y = \sqrt{u}$ 在区间 $[0, 4]$ 上单调递增, 所以 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ 的最大值 $m = 2$, 最小值 $n = 0$, 则 $m - n = 2$, 故 **C 正确**;

对于 D, 令 $t = 2^x$, 因为 $x \in [0, 1]$, 所以 $t = 2^x \in [1, 2]$, 易知 $y = t^2 - t$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $y = t^2 - t$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值 $m = 2$, 最小值 $n = 0$, 则 $m - n = 2$, 故 **D 正确**. 故选 BCD.



19. B 【解析】已知 $f(1, 1) = 1, f(x+1, 1) = 2f(x, 1)$,

则 $f(2, 1) = 2f(1, 1) = 2, f(3, 1) = 2f(2, 1) = 2 \times 2 = 2^2$,

以此类推, $f(n, 1) = 2^{n-1}f(1, 1) = 2^{n-1}$, 则 $f(x, 1) = 2^{x-1}$.

又 $f(x, y+1) = f(x, y) + 1$, 则 $f(x, 2) = f(x, 1) + 1 = 2^{x-1} + 1$,

$f(x, 3) = f(x, 2) + 1 = (2^{x-1} + 1) + 1 = 2^{x-1} + 2$,

以此类推, $f(x, m) = 2^{x-1} + m - 1$, 则 $f(x, y) = 2^{x-1} + y - 1$.

所以 $f(2\ 025, 2\ 024) = 2^{2\ 025-1} + 2\ 024 - 1 = 2^{2\ 024} + 2\ 023$. 故选 B.

20. ACD 【解析】对 A, 由题知 $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$

($a > 0$) 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = a \cdot \frac{e^{-\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}}{2} = f(x)$, 所以 $f(x)$

是偶函数, 故 A 正确.

对 B, 函数 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的导函数 $[\cosh(x)]' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 当

$x \in (-\infty, 0)$ 时, $[\cosh(x)]' < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$[\cosh(x)]' > 0$, 所以 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的单调递减区间为

$(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$. 又 $a > 0$, 所以函数 $y =$

$\frac{x}{a}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 由复合函数的单调性, 可知 $f(x)$ 在

$(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 错误.

对 C, 由基本不等式可知 $f(x) = a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \geq a \cdot$

$\frac{2\sqrt{e^{\frac{x}{a}} \cdot e^{-\frac{x}{a}}}}{2} = a$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 故 C 正确.

对 D, $\cosh(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$, $2[\cosh(x)]^2 - 1 = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 =$

$\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2} - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$, 则 $\cosh(2x) = 2[\cosh(x)]^2 - 1$, 故 D

正确. 故选 ACD.



综合提分练

1. B 必刷考点 ①函数的奇偶性、单调性

【解析】 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$, 当且仅当 $e^x =$

e^{-x} , 即 $x = 0$ 时等号成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为

$f(-x) = e^{-x} - e^x + 2x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数. $f(m - \sin x) +$

$f(1 - \sqrt{3} \cos x) > 0$ 等价于 $f(m - \sin x) > f(\sqrt{3} \cos x - 1)$, 所以 $m -$

$\sin x > \sqrt{3} \cos x - 1$, 即 $m > \sin x + \sqrt{3} \cos x - 1 = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ 恒成

立, 所以 $m > 1$. 故选 B.

2. D 必刷题型 ①利用函数的单调性及奇偶性比较大小

【解析】因为函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 故 $a =$

$-f(-2^{0.48}) = f(2^{0.48})$.

$\frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$, 因为 $\log_2 3 = \log_2 \sqrt{9} > \log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} > \sqrt{2} =$

$2^{0.5} > 2^{0.48}$, 所以 $\frac{1}{\log_3 2} > 2^{0.48}$,

又因为 $\log_2 3 = \log_4 9 = \log_4 \sqrt{81} < \log_4 \sqrt{82}$, 所以 $\frac{1}{\log_3 2} < \log_4 \sqrt{82}$,



综上, $2^{0.48} < \frac{1}{\log_3 2} < \log_4 \sqrt{82}$. 又因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $-f(-2^{0.48}) = f(2^{0.48}) > f\left(\frac{1}{\log_3 2}\right) > f(\log_4 \sqrt{82})$, 即 $a > b > c$. 故选 D.

3. D 必刷考点 ④ 构造新函数, 利用函数的单调性及奇偶性解不等式

【解析】因为 $\forall x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$, 所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - 2 > 0$, $\frac{[f(x_1) - 2x_1] - [f(x_2) - 2x_2]}{x_1 - x_2} > 0$.

令 $g(x) = f(x) - 2x$,

关键点

则 $\forall x_1 \neq x_2, \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

不等式 $f(x+x^2) + f(2-4x) < 2x^2 - 6x + 4$ 等价于 $f(x+x^2) - 2(x+x^2) < -f(2-4x) + 4 - 8x$,

即 $f(x+x^2) - 2(x+x^2) < -[f(2-4x) - 2(2-4x)]$,

即 $g(x+x^2) < -g(2-4x)$.

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $g(-x) = f(-x) - 2(-x) = -[f(x) - 2x] = -g(x)$,

即 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 所以不等式 $g(x+x^2) < -g(2-4x)$ 等价于 $g(x+x^2) < g(4x-2)$, 又 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以不等式等价于 $x+x^2 < 4x-2$, 即 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 解得 $1 < x < 2$. 故选 D.

4. ACD 必刷题型 ④ 函数性质的综合应用

【解析】对于 A: 由 $f(2024-x) = f(x-2022)$ 可知函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称.

因为函数 $y = f(2x-1)$ 是奇函数, 所以函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称 (提示: 根据 $y = f(2x-1)$ 是奇函数, 得 $f(-2x-1) = -f(2x-1)$, 即 $f(-x-1) = -f(x-1)$, 得到 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称), 因此函数 $y = f(x)$ 的一个周期为 8, 故 A 正确.

对于 B: 由 A 选项分析可知 $f(-1) = -f(-1)$, 得 $f(-1) = 0$, $f(1) + f(5) = f(1) + f(-3) = 0$, $f(2) + f(4) = f(2) + f(-4) = 0$, $f(6) + f(8) = f(-2) + f(0) = 0$, 又 $f(3) = f(-1)$, $f(7) = f(-1)$,

所以 $f(3) = f(7) = 0$, 故 $\sum_{k=1}^8 f(k) = 0$, 因此 $\sum_{k=1}^{2030} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(6) = f(6) = -f(8) = -f(0) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 B 错误.

对于 C: $f(-x-3) = f(x+5) = f(x-3)$, 故函数 $y = f(x-3)$ 是偶函数, 故 C 正确.

对于 D: 令 $g(x) = f(4x-3)$, 则 $g(x+2) = f(4x+5) = f(4x-3) = g(x)$, 因此函数 $y = g(x)$ 的一个周期是 2. 因为 $f(1) = \sqrt{3}$, 所以 $g(1) = f(1) = \sqrt{3}$, 又 $f(1) + f(5) = 0$, 故 $g(2) = f(5) = -f(1) = -\sqrt{3}$, 所以当 x 为奇数时, $g(x) = \sqrt{3}$, 当 x 为偶数时,

$g(x) = -\sqrt{3}$, 所以 $\sum_{k=1}^{2023} (-2)^k f(4k-3) = \sum_{k=1}^{2023} (-2)^k g(k) = \sum_{k=1}^{2023} (-2)^k (-1)^{k+1} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3} \sum_{k=1}^{2023} 2^k = -\sqrt{3} \times (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2023}) = -\sqrt{3} \times \frac{2 \times (1 - 2^{2023})}{1 - 2} = \sqrt{3} (2 - 2^{2024})$, 故 D 正确. 故选 ACD.

**5. D 必刷考点** ①函数的单调性、奇偶性、基本不等式

【解析】因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时,

$$f(x) = e^x - a,$$

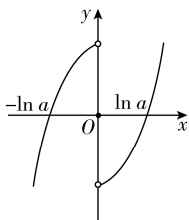
所以当 $x < 0$ 时, $-x > 0, f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + a$, 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$.

$$\text{令 } e^x - a \geq -e^{-x} + a, \text{ 即 } a \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

因为 $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立, 所以 $a \leq 1$.

若 $a \leq 1$, 则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $x - |a - 1| \leq x$, 所以 $f(x - |a - 1|) \leq f(x) = -f(-x)$, 即 $f(-x) + f(x - |a - 1|) \leq 0$ 恒成立, 故 $a \leq 1$ 满足题意, 排除选项 A;

若 $a > 1$, 则 $a - 1 > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调, 大致图象如图所示,



又 $f(-x) + f(x - |a - 1|) \leq 0$, 即 $f(x - (a - 1)) \leq f(x)$, 可理解为函数 $f(x - (a - 1))$ 的图象不在函数 $f(x)$ 的图象上方, 所以由图象可得 $a - 1 \geq 2 \ln a$, 即 $2 \ln a - a + 1 \leq 0$,

令 $g(a) = 2 \ln a - a + 1 (a > 1)$, 则 $g(2.025) = 2 \ln 2.025 - 2.024 < 0$, $g(3) = 2 \ln 3 - 2 = 2(\ln 3 - 1) > 0$,

$g(e^2) = 2 \ln e^2 - e^2 + 1 = 5 - e^2 < 0$. 故选 D.

6. ACD 必刷知识 ①函数的单调性、函数图象的对称性

【解析】由② $\forall x \in [0, 1], f(x) = 1 - f(1 - x)$, 可知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图象关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 对称, 由③ $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$,

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$, 取 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, 则有 $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}, f(\frac{2}{3}) = 1 - f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$, 所以若 $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, 则 $f(x) = \frac{1}{2}$, A 正确;

$f(\frac{1}{41}) = \frac{1}{2}f(\frac{3}{41}) = \frac{1}{2^2}f(\frac{9}{41}) = \frac{1}{2^3}f(\frac{27}{41})$, 因为 $\frac{27}{41} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, 所以 $f(\frac{27}{41}) = \frac{1}{2}$, 故 $f(\frac{1}{41}) = \frac{1}{16}$, D 正确;

$f(\frac{1}{9}) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图象关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 对称, 所以 $f(\frac{8}{9}) = \frac{3}{4}$, 将 $x = \frac{8}{9}$ 代入 $f(x) =$

$2f(\frac{x}{3})$, 得 $f(\frac{8}{9}) = 2f(\frac{8}{27}) = \frac{3}{4}$, 解得 $f(\frac{8}{27}) = \frac{3}{8}$, B 错误;

$f(\frac{3^k - 1}{3^k}) = 1 - f(\frac{1}{3^k}) = 1 - \frac{1}{2}f(\frac{1}{3^{k-1}}) = 1 - \frac{1}{2^2}f(\frac{1}{3^{k-2}}) = \dots = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}f(\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{2^k - 1}{2^k}$, C 正确. 故选 ACD.

7. 2 必刷考点 ①利用函数的奇偶性求参数值

【解析】实数 $a > 0$, 且函数 $f(x) = \frac{10^x + a}{10^x - a}$ 为奇函数, $f(-x) =$



$\frac{10^{-x}+a}{10^{-x}-a} = \frac{10^x(10^{-x}+a)}{10^x(10^{-x}-a)} = \frac{1+a \cdot 10^x}{1-a \cdot 10^x}$, 由奇函数的定义可得

$f(-x) = -f(x)$, 即 $\frac{1+a \cdot 10^x}{1-a \cdot 10^x} = -\frac{10^x+a}{10^x-a}$, 整理可得 $(a^2-1)10^x =$

0, 则 $a^2-1=0$, 因为 $a>0$, 解得 $a=1$, 所以 $f(x) = \frac{10^x+1}{10^x-1}$, 故

$$f(\lg 3) = \frac{10^{\lg 3}+1}{10^{\lg 3}-1} = \frac{3+1}{3-1} = 2.$$

8. **(-2, 2)** **必刷考点** ⊙ 函数图象对称性的应用、绝对值三角不等式、利用函数的单调性解不等式

【解析】 因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称, 所以 $f(4-x) + f(x) = 2$, 所以 $f(|x+a|) < 2 - f(|x-a|) = f(4-|x-a|)$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $|x+a| < 4 - |x-a|$, 即 $|x+a| + |x-a| < 4$ 有解, 而 $|x+a| + |x-a| \geq 2|a|$, 所以 $2|a| < 4$, 解得 $-2 < a < 2$.

真题风向练

9. **D** **命题点** ⊙ 函数的奇偶性、函数图象的对称性

【解析】 $\because f(x) + f(x-2) = 0, \therefore f(x) = -f(x-2), \therefore f(x+2) = -f(x) = f(x-2)$, 即 $f(x+4) = f(x)$, 故 $f(x)$ 的周期为 4.

$\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-x) = f(x), \therefore f(x+4) = f(-x), \therefore f(x+2) = f(2-x), \therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 又当 $x \in$

$\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 时, $f(x) = x^2 + ax + b, \therefore -\frac{a}{2} = 2$, 解得 $a = -4$, 故当 $x \in$

$\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 时, $f(x) = x^2 - 4x + b$. 已知 $f(x) + f(x-2) = 0$, 令 $x = 1$,

则 $f(1) + f(-1) = 0$, 又 $f(1) = f(-1), \therefore f(1) = 0. \because f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $\therefore f(3) = f(1) = 0$, 即 $f(3) = 9 - 12 + b = 0$, 得 $b = 3$. 故选 D.

一题多解

(排除法) 由题可得, $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 则 $f(x) = f(-x)$, 在 $f(x) + f(x-2) = 0$ 中, 令 $x = 1$, 则 $f(1) + f(-1) = 0$, 所以 $f(1) = f(-1) = 0$, 令 $x = 3$, 则 $f(3) + f(1) = 0$, 即 $f(3) = 0$, 又因为当 $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 时, $f(x) = x^2 + ax + b$, 所以 $f(3) = 9 + 3a + b = 0$. 对于 A, 当 $a = -2, b = -3$ 时, $9 - 6 - 3 = 0$, 符合题意; 对于 B, 当 $a = -2, b = 3$ 时, $9 - 6 + 3 \neq 0$, 故舍去; 对于 C, 当 $a = -4, b = -3$ 时, $9 - 12 - 3 \neq 0$, 故舍去; 对于 D, 当 $a = -4, b = 3$ 时, $9 - 12 + 3 = 0$, 符合题意. 接下来判断 A, D 选项.

在 $f(x) + f(x-2) = 0$ 中, 令 $x = \frac{3}{2}$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$;

令 $x = \frac{5}{2}$, 则 $f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 又 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, 所以

$f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$, 即 $\frac{9}{4} + \frac{3}{2}a + b = \frac{25}{4} + \frac{5}{2}a + b$, 解得 $a = -4$. 故选 D.

第3节 基本初等函数



题型上分练

1. **B** **【解析】** 根据题意, 可得 $\begin{cases} m^\alpha + n^\alpha = 6, \\ (m^\alpha - 1)(n^\alpha - 1) = 3, \end{cases}$ 则 $(mn)^\alpha =$



8, $\therefore f(mn) = (mn)^a - 1 = 7$. 故选 B.

2. B 【解析】因为这台计算机平均每秒可进行 10^{14} 次运算, 所以 2^{50} 次运算需要 $\frac{2^{50}}{10^{14}}$ 秒, 而 $\lg \frac{2^{50}}{10^{14}} = \lg 2^{50} - \lg 10^{14} = 50 \lg 2 - 14 \approx 50 \times 0.3 - 14 = 1$, 所以 $\frac{2^{50}}{10^{14}} \approx 10$. 故选 B.

3. C 【解析】因为 $\log_a c = \frac{\lg c}{\lg a} = \frac{\lg c}{\lg b} \times \frac{\lg b}{\lg a} = \log_a b \cdot \log_b c$ (提示: 换底公式及其逆用), 所以 $\log_a b + \log_b c + \log_a b \cdot \log_b c = 5$.

又因为 $\log_b a + \log_c b = 3$, 所以 $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} = 3$, 即 $\frac{\log_a b + \log_b c}{\log_a b \cdot \log_b c} = 3$, 故 $\log_a b + \log_b c = 3 \log_a b \cdot \log_b c$, 所以 $4 \log_a b \cdot \log_b c = 5$, 即 $\log_a b \cdot \log_b c = \frac{5}{4}$, 故 $\log_a c = \frac{5}{4}$, 所以 $\log_c a = \frac{4}{5}$, 故选 C.

4. 6 【解析】由题得, $2 \times 3 = \log_b a \times \log_c b = \frac{\ln a}{\ln b} \cdot \frac{\ln b}{\ln c} = \frac{\ln a}{\ln c} = \log_c a$, 故 $\log_c a = 6$.

一题多解 由 $\log_b a = 2, \log_c b = 3$, 得 $a = b^2, b = c^3$, 则 $a = c^6$, 所以 $\log_c a = \log_c c^6 = 6$.

5. C 【解析】由于 $f(x)$ 为幂函数, 所以 $m^2 - m + 1 = 1$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 1$, 又函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $-2m + 1 < 0$, 即 $m > \frac{1}{2}$, 故 $m = 1$.

6. C 【解析】设 $g(x) = x^2 - \frac{a}{3}x - 9$, $g(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = \frac{a}{6}$, $\therefore$ 方程 $x^2 - \frac{a}{3}x - 9 = 0$ 根的判别式 $\Delta = \frac{a^2}{9} + 36 > 0$, $\therefore$ 函数 $g(x)$ 一定有两个零点.

设 $g(x)$ 的两个零点为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 $f(x) = x^2 -$

$$\left| x^2 - \frac{a}{3}x - 9 \right| = \begin{cases} \frac{a}{3}x + 9, & x < x_1, \\ 2x^2 - \frac{a}{3}x - 9, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ \frac{a}{3}x + 9, & x > x_2. \end{cases}$$

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递减或恒等于 9, 不符合题意, 故 $a > 0$.

$\therefore$ 函数 $y = 2x^2 - \frac{a}{3}x - 9$ 的图象的对称轴为直线 $x = \frac{a}{12}$, 且 $-3 <$

$\frac{a}{12}$, $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递增, $\therefore x_1 > -3$,

$\therefore f(x)$ 的图象连续, $\therefore$ 要满足 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

只需 $\frac{a}{12} \leq 1$, 则 $0 < a \leq 12$. 故选 C.

7. B 【解析】 $f(x) = (x^2 - 8x + 15)(x^2 + bx + c) = (x - 3)(x - 5)(x^2 + bx + c)$, 因为函数的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 所以方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的根应为 1 和 -1 (提示: 与方程 $f(x) = 0$ 的另外两个根 3 和 5 分别关于直线 $x = 2$ 对称), 所以 $x^2 + bx + c = (x - 1)(x + 1)$, 故 $b = 0, c = -1$, 即 $f(x) = (x^2 - 8x + 15)(x^2 - 1)$.

令 $t = x - 2$, 则 $x = t + 2$, 故 $y = (t - 1)(t - 3)(t + 1)(t + 3) = (t^2 - 1) \cdot (t^2 - 9) = t^4 - 10t^2 + 9$, 令 $s = t^2$ ($s \geq 0$), 则 $y = s^2 - 10s + 9$ ($s \geq 0$), 其



图象开口向上,对称轴为直线 $s=5$,故 $y_{\min}=-16$,故函数 $f(x)$ 的最小值为 -16 .

故选 B.

8. D 【解析】因为 $m>0, n>0$, 所以 $m+2n \leq \lambda mn^2$ 即 $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{mn} \leq \lambda$.

因为 $\frac{3m}{n} + 1 = 2m$, 所以 $\frac{1}{n} = \frac{2m-1}{3m}$, 故 $\left(\frac{2m-1}{3m}\right)^2 + \frac{2}{m} \cdot \frac{2m-1}{3m} \leq$

λ , 即 $\frac{4m^2+8m-5}{9m^2} \leq \lambda$,

$\frac{4m^2+8m-5}{9m^2} = -\frac{5}{9} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{m} + \frac{4}{9} = -\frac{5}{9} \left(\frac{1}{m} - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \leq \frac{4}{5}$, 当且仅当 $m = \frac{5}{4}$ 时, 等号成立,

故 $\lambda \geq \frac{4}{5}$, 即实数 λ 的最小值为 $\frac{4}{5}$. 故选 D.

9. B 【解析】函数 $f(x) = x^2 - (2k^2+4)x + 5$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = k^2 + 2$.

当 $k \in [1, 2]$ 时, 对于任意 $x_1 \in [k, k+m], x_2 \in [k+2m, k+4m]$, 都有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则 $k+m < k^2+2$, 故 $m < k^2 - k + 2 =$

$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \in [2, 4]$, 即 $m < 2$. 由对称性得 $f(k+m) =$

$f(2k^2+4-k-m)$, 所以 $2k^2+4-k-m \geq k+4m$, 即 $m \leq \frac{2}{5}(k^2 - k +$

$2) \in \left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]$, 故 $m \leq \frac{4}{5}$. 故实数 m 的最大值为 $\frac{4}{5}$. 故选 B.

10. D 【解析】因为 $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 根据复合函数单调性可知, 需满足 $y = x(a-x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 故 $\frac{a}{2} \leq -1$, 解得 $a \leq -2$. 故选 D.

11. C 【解析】 $a^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, b^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, 因为 $0 < \frac{1}{16} < \frac{8}{27} < 1$, 故 $a^6 > b^6$, 所以 $0 < b < a < 1$. 因为 $a+b-1 > 2b-1 = 2 \times$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 2^{\frac{1}{3}} - 1 > 0$, 所以 $c = 2^{a+b-1} > 2^0 = 1$, 所以 $c > a > b$.

故选 C.

12. A 【解析】因为 $a, b > 0$, 所以 $a < 2a, b < 2b$, 所以 $3^b < 3^{2b}, 2^{2b} > 2^b$ (提示: 指数函数的单调性).

又因为 $2^a + 3^a = 3^b + 4^b = 3^b + 2^{2b}$,

所以 $2^a + 3^a > 3^b + 2^b$, 且 $2^a + 3^a < 3^{2b} + 2^{2b}$,

故 $3^b + 2^b < 2^a + 3^a < 3^{2b} + 2^{2b}$.

设 $s(x) = 2^x + 3^x$, 易知 $s(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 且 $s(b) < s(a) < s(2b)$, 则有 $b < a < 2b$, 所以 $2b < 2a$, 即 $b < a < 2b < 2a$, 故选 A.

13. BCD 【解析】由 $f(x)$ 是偶函数, 得 $f(x) = f(-x)$, 即 $ma^x +$

关键点

$na^{-x} = ma^{-x} + na^x$, 故 $m = n$, 所以 $a^{2x} + a^{-2x} + f(x) = a^{2x} + a^{-2x} + m(a^x + a^{-x}) \geq 0$ 恒成立, 令 $t = a^x + a^{-x} (t \geq 2)$, 则 $a^{2x} + a^{-2x} = t^2 -$

2 , 故 $tm + t^2 - 2 \geq 0$ 恒成立, 即 $m \geq \frac{2}{t} - t$ 恒成立.

令 $g(t) = \frac{2}{t} - t (t \geq 2)$ (易错: 不要遗漏新元的取值范围),



因为 $g(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $m \geq g(t)_{\max} = g(2) = -1$, 综合选项 m 的可能取值为 $-1, 0, 1$. 故选 BCD.

14. ACD 【解析】对于函数 $f(x) = \frac{2}{2^x-1} + a$ ($a \in \mathbf{R}$), 令 $2^x - 1 \neq 0$, 解得 $x \neq 0$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 故 **A** 正确;

因为 $2^x > 0$, 当 $2^x - 1 > 0$ 时, $\frac{2}{2^x-1} > 0$, 所以 $\frac{2}{2^x-1} + a > a$;

当 $-1 < 2^x - 1 < 0$ 时, $\frac{2}{2^x-1} < -2$, 所以 $\frac{2}{2^x-1} + a < -2 + a$.

综上可得 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -2+a) \cup (a, +\infty)$, 故 **B** 错误;

当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{2}{2^x-1} + 1 = \frac{2^x+1}{2^x-1}$, $x \neq 0$, 则 $f(-x) = \frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1} = -\frac{2^x+1}{2^x-1} = -f(x)$, 所以 $f(x) = \frac{2}{2^x-1} + 1$ 为奇函数, 故 **C** 正确;

当 $a = 2$ 时, $f(x) = \frac{2}{2^x-1} + 2 = \frac{2^x+1}{2^x-1} + 1$, 则 $f(-x) + f(x) = \frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1} + 1 + \frac{2^x+1}{2^x-1} + 1 = 1 + \frac{2^x+1}{2^x-1} + 1 = 2$, 故 **D** 正确. 故选 ACD.

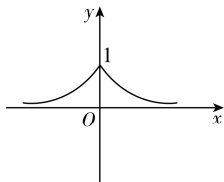
15. $(-\infty, 2) \cup (\log_2 6, +\infty)$ 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 由 $f(x) - 2^x$ 是奇函数, 得 $f(-x) - 2^{-x} = -[f(x) - 2^x]$,

即 $f(x) + f(-x) = 2^x + 2^{-x}$, 则不等式 $f(2^x - 5) + f(5 - 2^x) > \frac{5}{2}$ 化为 $2^{2^x-5} + 2^{5-2^x} > \frac{5}{2}$.

令 $2^{2^x-5} = t$, 则 $t > 0$, 则不等式化为 $t + \frac{1}{t} > \frac{5}{2}$, 即 $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 > 0$, 解得 $0 < t < \frac{1}{2}$ 或 $t > 2$.

由 $0 < t < \frac{1}{2}$, 得 $2^{2^x-5} < \frac{1}{2}$, 即 $2^x - 5 < -1$, 解得 $x < 2$; 由 $t > 2$, 得 $2^{2^x-5} > 2$, 即 $2^x - 5 > 1$, 解得 $x > \log_2 6$, 所以所求不等式的解集为 $(-\infty, 2) \cup (\log_2 6, +\infty)$.

16. $(0, 1)$ 【解析】函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 是偶函数, 作出其大致图象, 如图所示.



方程 $f^2(x) - (a+1)f(x) + a = 0$, 即 $[f(x) - 1] \cdot [f(x) - a] = 0$, 解得 $f(x) = 1$ 或 $f(x) = a$,

由函数 $f(x)$ 的图象可知, $f(x) = 1$ 只有 1 个根, 所以 $f(x) = a$ 需有 2 个根才满足题意, 所以实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

17. B 【解析】因为两个函数的图象关于直线 $y = x$ 对称, 所以 $y = f(x)$ 是 $y = \log_3 x + a$ 的反函数, 由 $y = \log_3 x + a$ 得 $x = 3^{y-a}$, 故 $f(x) = 3^{x-a}$. 又因为 $f(2) = 18$, 所以 $3^{2-a} = 18$,

化简可得 $\frac{3^2}{3^a} = 18$, 即 $3^a = \frac{1}{2}$, 所以 $a = \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$.



- 18. D** 【解析】函数 $y = \log_a(9-ax)$, 故 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 所以 $y = 9-ax$ 为减函数. 由复合函数单调性知, 应满足函数 $y = \log_a x$ 为增函数, 则 $a > 1$, 且 $9-3a \geq 0$, 即 $1 < a \leq 3$, 故 a 的取值范围是 $(1, 3]$. 故选 D.
- 19. D** 【解析】 $\because \forall x_1 \in [1, 2], \exists x_2 \in [1, 4]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 恒成立, $\therefore f(x_1)_{\min} \geq g(x_2)_{\min}$ 恒成立.
 $\because f(x) = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $x = \sqrt{2}$ 时取等号), $\therefore f(x_1)_{\min} = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, 又 $\because g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore g(x) \geq g(4) = -2+m$, $\therefore 2\sqrt{2} \geq -2+m$, 解得 $m \leq 2+2\sqrt{2}$,
 $\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 2+2\sqrt{2}]$. 故选 D.
- 20. C** 【解析】由换底公式等价变形得 $c = \log_{23} 7 = \frac{1}{\log_7 23}$.
 因为 $7^5 > 23^3$, 两边取以 7 为底的对数可得 $5 > \log_7 23^3 = 3\log_7 23 \Rightarrow \log_7 23 < \frac{5}{3}$,
 又因为 $7^3 = 343 < 529 = 23^2$, 两边取以 7 为底的对数可得 $3 < \log_7 23^2 = 2\log_7 23 \Rightarrow \log_7 23 > \frac{3}{2}$,
 所以 $c = \frac{1}{\log_7 23} \in \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right)$.
 由 $3b = 3 \log_{11} 5 = \log_{11} 5^3 = \log_{11} 125 > \log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2$, 可得 $b > \frac{2}{3}$.
 由 $5a = 5\log_7 3 = \log_7 3^5 = \log_7 243 < \log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$, 可得 $a < \frac{3}{5}$.
 综上, $a < c < b$, 故选 C.
- 21. A** 【解析】由题意得, $m = \log_{0.3} 0.4, n = \log_2 0.4$.
 $\because$ 函数 $y = \log_{0.3} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore 0 = \log_{0.3} 1 < \log_{0.3} 0.4 < \log_{0.3} 0.3 = 1$, 即 $0 < m < 1$.
 $\because$ 函数 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore \log_2 0.4 < \log_2 1 = 0$, 即 $n < 0$.
 $\therefore mn < 0$.
 $\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\log_{0.3} 0.4} + \frac{1}{\log_2 0.4} = \log_{0.4} 0.3 + \log_{0.4} 2 = \log_{0.4} 0.6$,
 $\log_{0.4} 1 < \log_{0.4} 0.6 < \log_{0.4} 0.4$, $\therefore 0 < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$.
 $\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}$, $\therefore 0 < \frac{m+n}{mn} < 1$, 由 $mn < 0$ 得, $m+n < 0$, 由 $\frac{m+n}{mn} < 1$ 得, $m+n > mn$.
 综上, $mn < m+n < 0$. 故选 A.
- 22. D** 【解析】函数 $f(x) = \ln x + 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,
 由 $2f(ax) = f(x+3) + f(x+5) (a > 0)$, 得 $2[\ln(ax) + 1] = \ln(x+3) + 1 + \ln(x+5) + 1$, 即 $\ln(a^2 x^2) + 2 = \ln[(x+3)(x+5)] + 2$, 则
关键点
 $a^2 x^2 = (x+3)(x+5)$,
 由 $x > 0$, 得 $a^2 = \frac{(x+3)(x+5)}{x^2} = 15\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 8 \cdot \frac{1}{x} + 1$.
 令 $t = \frac{1}{x}$, 则存在 $t > 0$, 使得 $a^2 = 15t^2 + 8t + 1$ 有解,



因为函数 $y=15t^2+8t+1$ 的图象的对称轴为直线 $t=-\frac{4}{15}$, 所以 $y=15t^2+8t+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $y=15t^2+8t+1>1$, 即 $a^2>1$, 又因为 $a>0$, 所以 $a>1$, 故 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$.

23. C 【解析】易知 $f(x)=3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f(-x)=3\log_2(\sqrt{(-x)^2+1}+x)=3\log_2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$-3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)=3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 的图象关于原点对称, $f(-x)+f(x)=0$.

函数 $f(x)=3\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)=3\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$ 为减函数,

关键点

又 $f(a)+f(3b-1)=0$, 所以 $a+3b-1=0$, 即 $a+3b=1$.

因为 a, b 为正数, 所以 $\frac{3b+a}{ab}=\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+3b)=$

$$\frac{9b}{a}+\frac{a}{b}+3+3\geqslant 2\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+6=12,$$

当且仅当 $\begin{cases} \frac{9b}{a}=\frac{a}{b}, \\ a+3b=1, \\ a>0, b>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=\frac{1}{6} \end{cases}$ 时等号成立, 故 $\frac{3b+a}{ab}$ 的最小

值为 12. 故选 C.

24. D 【解析】设 $4^a=b^3=c^2=k(k>0)$, 因为 $0<c<1$, 所以 $0<$

关键点

$k<1$.

则 $a=\log_4 k=\frac{\ln k}{\ln 4}$, $b=k^{\frac{1}{3}}$, $c=k^{\frac{1}{2}}$ (提示: 将 a, b, c 用同一个参数表示).

因为 $0<k<1$, 所以 $\ln k<0$, 而 $\ln 4>0$, 故 $a<0$;

又因为函数 $y=k^x$ 单调递减, 且 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, 所以 $k^{\frac{1}{3}}>k^{\frac{1}{2}}$, 即 $b>c>0$.

综上, $a<c<b$.

25. C 【解析】因为 $P=P_0e^{-kt}$, 所以 $1-\frac{P}{P_0}=1-e^{-kt}$, 设消除 $\frac{2}{3}$ 的污染物大约需要 t_0 h,

由题意可得 $\begin{cases} 1-e^{-5k}=\frac{1}{3}, \\ 1-e^{-kt_0}=\frac{2}{3}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} e^{-5k}=\frac{2}{3}, \\ e^{-kt_0}=\frac{1}{3}, \end{cases}$ 取对数可得

$$\begin{cases} -5k=\ln\frac{2}{3}, \\ -kt_0=\ln\frac{1}{3}, \end{cases} \text{ 故 } \frac{t_0}{5}=\frac{\ln\frac{1}{3}}{\ln\frac{2}{3}}=\frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{2}{3}}=\frac{\lg 3}{\lg 3-\lg 2},$$

$$\text{所以 } t_0=\frac{5\lg 3}{\lg 3-\lg 2}\approx\frac{5\times 0.477}{0.477-0.301}\approx 13.551\approx 14,$$

所以要消除 $\frac{2}{3}$ 的污染物大约需要 14 h. 故选 C.

26. D 【解析】由题意可得 $a>0, b>0$, 则 $16^b+2\log_{25}(7b)=2^{4b}+$

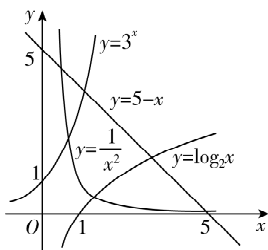
$\log_5(7b)<2^{4b}+\log_5(8b)$, 即 $2^{\frac{a}{2}}+\log_5 a<2^{4b}+\log_5(8b)$.

令 $f(x)=2^x+\log_5(2x)$, 则函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递



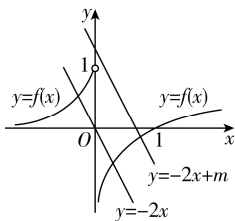
增, $f\left(\frac{a}{2}\right) = 2^{\frac{a}{2}} + \log_5 a$, $f(4b) = 2^{4b} + \log_5(8b)$, 即 $f\left(\frac{a}{2}\right) < f(4b)$, 故 $\frac{a}{2} < 4b$, 即 $a < 8b$. 故选 D.

- 27. D** 【解析】由 $a + \log_2 a = b + 3^b = c + \frac{1}{c^2} = 5$, 得 $\log_2 a = 5 - a$, $3^b = 5 - b$, $\frac{1}{c^2} = 5 - c$, 在同一平面直角坐标系中, 作出函数 $y = \log_2 x$, $y = 3^x$, $y = \frac{1}{x^2} (x > 0)$, $y = 5 - x$ 的大致图象, 如图所示, 由图可知, $c < b < a$ 或 $b < a < c$. 故选 D.



- 28. C** 【解析】由 $g(x) = 0$, 得 $f(x) = -2x + m$, 因此 $g(x)$ 有且仅有一个零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = -2x + m$ 有且仅有一个交点.

在同一平面直角坐标系中作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = -2x + m$ 的大致图象, 如图所示.



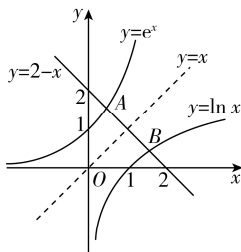
观察图象知, 当 $m < 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = -2x + m$ 有两个交点;

当 $m \geq 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = -2x + m$ 有一个交点.

所以 m 的取值范围是 $[1, +\infty)$. 故选 C.

- 29. B** 【解析】由题意可得 $\begin{cases} e^a + a = 2, \\ \ln b + b = 2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} e^a = -a + 2, \\ \ln b = -b + 2, \end{cases}$

在同一平面直角坐标系中分别作出函数 $y = e^x$, $y = -x + 2$, $y = \ln x$ 的大致图象, 如图所示.



由 $e^a = -a + 2$, 可知 $A(a, e^a)$, 由 $\ln b = -b + 2$, 可知 $B(b, \ln b)$,

联立 $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$

因为函数 $y = e^x$ 与 $y = \ln x$ 互为反函数, 所以由反函数性质知 A, B 关于点 $(1, 1)$ 对称, 则 $a + b = 2$, $e^a + \ln b = 2$, 且 $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.



对于 A, $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$, 故 A 错误;

对于 B, 由 $a+b=2, ab<1$, 得 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=2[(a+b)^2-3ab]=2(4-3ab)>2$, 故 B 正确;

对于 C, $e^a+\ln b=2$, 故 C 错误;

对于 D, 易知函数 $f(x)=x+e^x$ 在 $(1,2)$ 上单调递增, 且 $b=e^a$, 则 $e^a+e^b=b+e^b$, 由图知 $b \in (1,2)$, 则 $b+e^b \in (1+e, 2+e^2)$, 即 $e^a+e^b \in (1+e, 2+e^2)$, 故 D 错误. 故选 B.

30. -1 【解析】令 $t=x-2026$, 原方程即为 $2^{|t|}+a\lg(t^2+10)=0$, 则原方程有唯一解, 即方程 $2^{|t|}+a\lg(t^2+10)=0$ 有唯一解.

设 $f(t)=2^{|t|}+a\lg(t^2+10)$, 可得 $f(-t)=2^{|-t|}+a\lg[(-t)^2+10]=2^{|t|}+a\lg(t^2+10)=f(t)$,

又 $f(t)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以函数 $f(t)$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 所以若方程 $2^{|t|}+a\lg(t^2+10)=0$ 有唯一解, 则这个解只能是 $t=0$.

当 $t=0$ 时, 可得 $f(0)=2^{0}+a\lg(0^2+10)=1+a\lg 10=1+a=0$, 解得 $a=-1$.

经验证, 当 $a=-1$ 时, 方程 $2^{|t|}-\lg(t^2+10)=0$ 有唯一解 $t=0$, 故 $a=-1$.



综合提分练

1. A 必刷考点 ①指数函数单调性及基本不等式的应用

【解析】 $\because x \in (0, +\infty)$, $\therefore e^x > 1$, 即 $f(b) > 1$,

又 $\frac{f(2a)}{f(b)} > 1$, $\therefore f(2a) > f(b)$,

又 $\because$ 函数 $f(x)=e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore 2a > b > 0$, 即 $2a-b > 0$.

令 $b=m > 0, 2a-b=n > 0$, 则 $a=\frac{m+n}{2}$,

$\therefore a^2 + \frac{4}{b(2a-b)} = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \frac{4}{mn} = \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{4}{mn} \geq$

$2\sqrt{\frac{1}{4}m^2 \cdot \frac{1}{4}n^2} + \frac{1}{2}mn + \frac{4}{mn} = mn + \frac{4}{mn}$, 当且仅当 $m=n$ 时等号成立,

又 $mn + \frac{4}{mn} \geq 2\sqrt{mn \cdot \frac{4}{mn}} = 4$, 当且仅当 $mn=2$ 时等号成立,

$\therefore$ 当且仅当 $m=n=\sqrt{2}$, 即 $a=b=\sqrt{2}$ 时 (提示: 多次使用基本不等式时注意取等的条件需一致), $a^2 + \frac{4}{b(2a-b)}$ 取得最小值 4.

2. D 必刷考点 ①指对互化、构造函数判断函数的单调性

【解析】由 $a-1=\ln(4-a)$, 可得 $e^{a-1}=4-a$, 即 $e^{a-1}+(a-1)-3=0$.

由 $be^b=e^3$, 可得 $b=e^{3-b}$, 所以 $\ln b=3-b=3-e^{\ln b}$, 即 $e^{\ln b}+\ln b-3=0$.

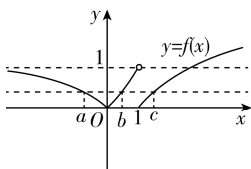
构造函数 $f(x)=e^x+x-3$, 因为 $y=e^x$ 和 $y=x-3$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 所以 $f(x)=e^x+x-3$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 由 $f(a-1)=f(\ln b)=0$, 得 $a-1=\ln b$, 又因为 $\ln b=3-b$, 所以 $a-1=3-b$, 所以 $a+b=4$. 故选 D.

3. A 必刷考点 ①利用指数型函数与对数函数的图象求代数式的取值范围

【解析】作出 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示. 由 $f(a)=f(b)=$



$f(c)$, 且 $a < b < c$, 得 $-(2^a - 1) = 2^b - 1 = \ln c$, 即 $2^a = 2 - 2^b$, $\ln c = 2^b - 1$, 由图知 $0 < b < 1$, 则 $2^b \in (1, 2)$,
故 $4^a + 2^b + \ln c = (2 - 2^b)^2 + 2^b + 2^b - 1 = 2^{2b} - 2 \cdot 2^b + 3 = (2^b - 1)^2 + 2$ (提示: 消元法),
由二次函数性质得 $(2^b - 1)^2 + 2 \in (2, 3)$, 即 $4^a + 2^b + \ln c \in (2, 3)$.



4. AB 必刷题型 ⊙ 对数运算的应用

【解析】因为 $2^4 < e^4 < 3^4$, 所以 e^4 用科学记数法表示为 $e^4 = \frac{e^4}{10} \times 10$, 所以 $\lg e^4 = 1 + \lg \frac{e^4}{10}$, 所以 $f(e^4) = 1$, 故 A 正确; 因为 $e^3 > 10$, 所以 $e > 10^{\frac{1}{3}}$, 即 $e^4 > 10^{\frac{4}{3}}$, 所以 $\frac{e^4}{10} > 10^{\frac{1}{3}}$, 即 $g(e^4) = \lg \frac{e^4}{10} > \frac{1}{3}$, 故 B 正确;

令 $x = 2, y = 5$, 则 $f(xy) = f(10) = 1$, 因为 $f(x) = f(2) = 0$, $f(y) = f(5) = 0$ (提示: $2, 5, 10$ 用科学记数法表示为 $2 \times 10^0, 5 \times 10^0, 1 \times 10^1$, $f(x)$ 对应着 10 上面的指数), 所以 $f(xy) \neq f(x) + f(y)$, 故 C 错误;

令 $x = 2, y = 5$, $g(xy) = g(10) = 0$, 因为 $g(x) = g(2) = \lg 2$, $g(y) = g(5) = \lg 5$, 所以 $g(xy) \neq g(x) + g(y)$, 故 D 错误. 故选 AB.

5. B 必刷题型 ⊙ 根据对数函数的图象和性质比较大小

【解析】由 $\frac{2a-1}{a-1} = 2 + 2\log_2 a$, 得 $2 + \frac{1}{a-1} = 2 + 2\log_2 a = 2 + \log_{\sqrt{2}} a$, 即 $\frac{1}{a-1} = \log_{\sqrt{2}} a$; ①

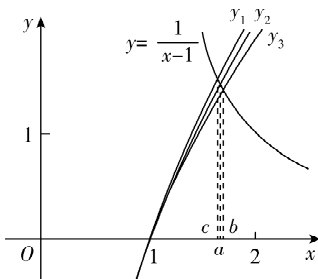
同理由 $\frac{3b-2}{b-1} = 3 + 3\log_3 b$, 得 $\frac{1}{b-1} = \log_{\sqrt[3]{3}} b$; ②

由 $\frac{5c-4}{c-1} = 5 + 5\log_5 c$, 得 $\frac{1}{c-1} = \log_{\sqrt[5]{5}} c$. ③

因此, ①②③式可化为 $\frac{1}{x-1} = \log_m x$ 的形式, 其中 $x = a, b, c$ 且

均大于 1, m 分别为 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}$, 且 $1 < \sqrt[5]{5} = \sqrt[10]{25} < \sqrt[10]{32} = \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$.

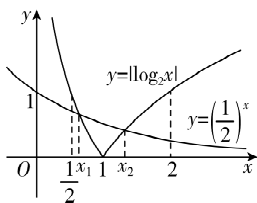
令 $y = \frac{1}{x-1}, y_1 = \log_{\sqrt[5]{5}} x, y_2 = \log_{\sqrt{2}} x, y_3 = \log_{\sqrt[3]{3}} x$, 并作出它们的大致图象, 如图所示. 由图可得 $c < a < b$, 故选 B.





6. C 必刷题型 ① 指数函数与对数函数的综合应用

【解析】由题意得 $0 < x_1 < x_2$, 由 $2^x \cdot |\log_2 x| = 1$ 得 $|\log_2 x| - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, 如图, 画出函数 $y = |\log_2 x|$ 和 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的大致图象, 两个函数图象有两个交点.



令 $f(x) = |\log_2 x| - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ($x > 0$), 则 $f(1) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$,

由 $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$, $f(1) \cdot f(2) < 0$, 得 $x_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x_2 \in (1, 2)$, 故 A 错误;

由 $|\log_2 x_2| - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} = |\log_2 x_1| - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} = 0$, 得 $|\log_2 x_2| - |\log_2 x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$, 由 $x_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x_2 \in (1, 2)$, 得

$\log_2 x_2 + \log_2 x_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} < 0$, 即 $\log_2 x_1 x_2 < 0$, 所以 $0 < x_1 x_2 < 1$, $x_1 < \frac{1}{x_2}$, 故 C 正确, B 错误;

因为 $x_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x_2 \in (1, 2)$, 所以 $x_1 + x_2 < 3$, 故 D 错误.

故选 C.

7. C 必刷考点 ① 指数函数与对数函数的综合应用

【解析】根据 $\sqrt{x} = 2^{-y} = -\log_2 z$, 可设 $x^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^y = \log_{\frac{1}{2}} z = t$ ($t >$

0). 因为 $Y = \log_{\frac{1}{2}} X$ 与 $Y = \frac{1}{2^X}$ 互为反函数, 所以两函数图象的交

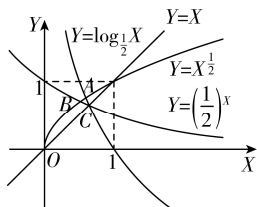
关键点

点 C 在直线 $Y = X$ 上, 且交点 C 的横坐标小于 1, 而函数 $Y = X^{\frac{1}{2}}$ 的图象与直线 $Y = X$ 交点的横坐标等于 1, 故在同一直角

坐标系中画出函数 $Y = \log_{\frac{1}{2}} X$, $Y = \frac{1}{2^X}$, $Y = X^{\frac{1}{2}}$, $Y = X$ 的大致图

象如图所示, 设 $Y = \frac{1}{2^X}$ 与 $Y = X^{\frac{1}{2}}$ 的图象交点为 B, $Y = \log_{\frac{1}{2}} X$ 与

$Y = X^{\frac{1}{2}}$ 的图象交点为 A, 则 $X_B < X_A < X_C$.



易知 x, y, z 分别代表直线 $Y = t$ 与函数 $Y = X^{\frac{1}{2}}$, $Y = \frac{1}{2^X}$, $Y = \log_{\frac{1}{2}} X$ 的图象交点的横坐标, 故由图可知当直线 $Y = t$ 位于点 A 的上方时, 有 $x > z > y$;



当直线 $Y=t$ 位于点 B 的上方,且在点 A 的下方时,有 $z>x>y$;
 当直线 $Y=t$ 位于点 C 的上方,且在点 B 的下方时,有 $z>y>x$;
 当直线 $Y=t$ 位于点 C 的下方时,有 $y>z>x$. 故选 C.

8. C 必刷考点 ①对数运算性质的应用

【解析】根据题意,不等式可转化为
$$\begin{cases} \log_2 \frac{(2^x-3a)}{a^2} + x - 2 > 0, \\ \log_2(2a) > 0 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} \log_2 \frac{(2^x-3a)}{a^2} + x - 2 < 0, \\ \log_2(2a) < 0. \end{cases}$$

分析:接下来分别解上述两个不等式组.

①由 $\log_2 \frac{(2^x-3a)}{a^2} + x - 2 > 0$, 得 $\log_2 \frac{(2^x-3a)}{a^2} + \log_2 2^x - \log_2 2^2 > 0$, 即 $\log_2 \frac{2^x(2^x-3a)}{4a^2} > 0$, 即 $\frac{2^x(2^x-3a)}{4a^2} > 1$, 即 $(2^x)^2 - 3a \cdot 2^x - 4a^2 > 0$, 即 $(2^x - 4a)(2^x + a) > 0$, $\therefore \log_2(2a) > 0$, 则 $2a > 1$, 解得 $a > \frac{1}{2}$, $\therefore 2^x - 4a > 0$, $\therefore x > 2 + \log_2 a$.

$\therefore$ 题中关于 x 的不等式的最小整数解为 3, $\therefore 2 \leq 2 + \log_2 a < 3$, 解得 $1 \leq a < 2$.

②由 $\log_2(2a) < 0$, 得 $0 < 2a < 1$, 解得 $0 < a < \frac{1}{2}$.

由 $\log_2 \frac{(2^x-3a)}{a^2} + x - 2 < 0$, 得 $\log_2 \frac{(2^x-3a)}{a^2} + \log_2 2^x - \log_2 2^2 < 0$, 即 $\log_2 \frac{2^x(2^x-3a)}{4a^2} < 0$, 即 $0 < \frac{2^x(2^x-3a)}{4a^2} < 1$.

当 $\frac{2^x(2^x-3a)}{4a^2} < 1$ 时, $(2^x)^2 - 3a \cdot 2^x - 4a^2 < 0$, $(2^x - 4a)(2^x + a) < 0$, $\therefore 2^x - 4a < 0$, $\therefore x < 2 + \log_2 a$, $\therefore 0 < a < \frac{1}{2}$,

$\therefore \log_2 a < -1$, x 取不到最小整数解;

当 $0 < \frac{2^x(2^x-3a)}{4a^2}$ 时, $2^x - 3a > 0$, $\therefore 2^x > 3a$, $\therefore x > \log_2(3a)$,

$\therefore 0 < a < \frac{1}{2}$, $\therefore \log_2(3a) < \log_2 \frac{3}{2} < \log_2 2 = 1$, x 的最小整数解一定不是 3.

综上所述, $1 \leq a < 2$. 故选 C.

真题风向练

9. B 命题点 ①指数式与对数式的互化、指数式比较大小

【解析】由题意知 $\log_2 x = 1 + \log_3 y = 3 + \log_5 z$,

令 $\log_2 x = 1 + \log_3 y = 3 + \log_5 z = k$, 则 $x = 2^k, y = 3^{k-1}, z = 5^{k-3}$,

k	x	y	z	大小关系	结论
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{125}$	$x > y > z$	A 正确
3	8	9	1	$y > x > z$	C 正确
6	64	243	125	$y > z > x$	D 正确

下面证明:选项 B 错误.

若 $x > z$, 则 $2^k > 5^{k-3}$, 即 $\left(\frac{5}{2}\right)^k < 5^3$, 两边同时取自然对数, 得



$$k \ln \frac{5}{2} < 3 \ln 5, \text{ 即 } k < \frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}}; \text{ 若 } z > y, \text{ 则 } 5^{k-3} > 3^{k-1}, \text{ 即 } \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} > 5^2,$$

$$\text{两边同时取自然对数, 得 } (k-1) \ln \frac{5}{3} > 2 \ln 5, \text{ 即 } k > \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1.$$

下面比较 $\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}}$ 和 $\frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1$ 的大小. 因为 $\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}} -$

$$\left(\frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1\right) = \frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}} - \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} - 1 = \frac{\ln 5 \left(3 \ln \frac{5}{3} - 2 \ln \frac{5}{2}\right)}{\ln \frac{5}{2} \ln \frac{5}{3}} - 1,$$

$$\text{因为 } \left(\frac{5}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{27} - \frac{25}{4} = -\frac{175}{108} < 0, \text{ 所以 } \left(\frac{5}{3}\right)^3 < \left(\frac{5}{2}\right)^2, \text{ 即 } 3 \ln \frac{5}{3} < 2 \ln \frac{5}{2}, \text{ 所以 } \frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}} < \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1, \text{ 所以 } k <$$

$$\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}} \text{ 与 } k > \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1 \text{ 不可能同时成立, 故 B 错误. 故选 B.}$$

一题多解

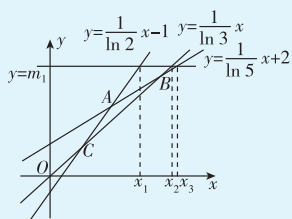
令 $x = e^{x_1}, y = e^{x_2}, z = e^{x_3}$, 比较 x, y, z 的大小, 只需比较 x_1, x_2, x_3 的大小.

由题意得, $2 + \log_2 e^{x_1} = 3 + \log_3 e^{x_2} = 5 + \log_5 e^{x_3}$, 即 $2 + \frac{1}{\ln 2} x_1 =$

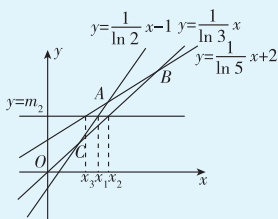
$3 + \frac{1}{\ln 3} x_2 = 5 + \frac{1}{\ln 5} x_3$, 即 $\frac{1}{\ln 2} x_1 - 1 = \frac{1}{\ln 3} x_2 = \frac{1}{\ln 5} x_3 + 2$. 在同

一平面直角坐标系内画出函数 $y = \frac{1}{\ln 2} x - 1, y = \frac{1}{\ln 3} x$ 和 $y =$

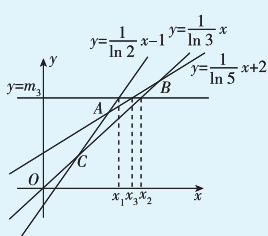
$\frac{1}{\ln 5} x + 2$ 的大致图象, 如图所示 $\left(\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 5}\right)$.



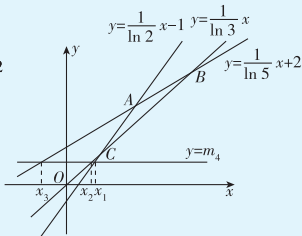
图①



图②



图③



图④

设直线 $y = \frac{1}{\ln 2} x - 1$ 与直线 $y = \frac{1}{\ln 5} x + 2$ 的交点为 A , 直线 $y =$

$\frac{1}{\ln 2} x - 1$ 与直线 $y = \frac{1}{\ln 3} x$ 的交点为 C , 直线 $y = \frac{1}{\ln 3} x$ 与直线

$y = \frac{1}{\ln 5} x + 2$ 的交点为 B .



如图①:当 $y=m_1$ (直线 $y=m_1$ 在点 B 的上方) 时,此时 $x_3 > x_2 > x_1$, 即 $z > y > x$, 选项中没有;

如图②:当 $y=m_2$ (直线 $y=m_2$ 在点 C 的上方,且在点 A 的下方) 时,此时 $x_2 > x_1 > x_3$, 即 $y > x > z$, 排除 C ;

如图③:当 $y=m_3$ (直线 $y=m_3$ 在点 A 的上方,且在点 B 的下方) 时,此时 $x_2 > x_3 > x_1$, 即 $y > z > x$, 排除 D ;

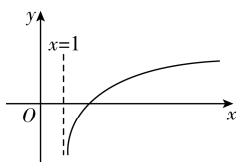
如图④:当 $y=m_4$ (直线 $y=m_4$ 在点 C 的下方) 时,此时 $x_1 > x_2 > x_3$, 即 $x > y > z$, 排除 A . 不存在选项 B 的情况. 故选 B .

第4节 函数的图象



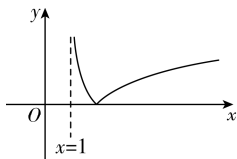
题型上分练

1. **C** 【解析】先将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到 $y=f(x-1)$ 的图象,如图①,



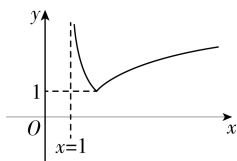
图①

然后保持 x 轴及其上方图象不变,将 x 轴下方图象翻折到 x 轴上方得到 $y=|f(x-1)|$ 的图象,如图②,



图②

最后将图象整体向上平移 1 个单位长度得到 $y=|f(x-1)|+1$ 的图象,如图③.



图③

故选 C .

2. **A** 【解析】 $\sqrt{x^2+1}+x > 0$ 恒成立,故 $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{e^x+e^{-x}}$ 的

定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{e^{-x}+e^x} = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}}{e^x+e^{-x}} =$

$-\frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{e^x+e^{-x}} = -f(x)$ (提示: $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x) =$

1 , 可以作为结论记忆,该式在对数运算时很常用),故 $f(x)$ 为奇函数, B, D 错误;

$y=e^x+e^{-x}$ 的增长速度远大于 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的增长速度,

故当 x 趋向于 $+\infty$ 时, $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{e^x+e^{-x}}$ 趋向于 0 , C 错误,

A 正确. 故选 A .



3. D 【解析】由题图可知 $f(x)$ 为奇函数, 且定义域为 $\{x|x \neq 0\}$.

对于 A, $f(-x) = \frac{\ln|-x|}{2+\cos(-x)} = \frac{\ln|x|}{2+\cos x} = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, 不符合题意.

对于 B, $f(-x) = \frac{\ln|-x|}{2+\sin(-x)} = \frac{\ln|x|}{2-\sin x} \neq -f(x)$, 故 $f(x)$ 不是奇函数, 不符合题意.

对于 C, $f(-x) = \cos(-x) \cdot \ln|-x| = \cos x \cdot \ln|x| = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, 不符合题意.

故选 D.

4. A 【解析】根据函数 $f(x)$ 的图象, 可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且函数 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) > 0$ 且 $f(x) \rightarrow 0$.

关键点

对于 A, 函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$, 此时 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) > 0$ 且 $f(x) \rightarrow 0$, 故 A 正确;

对于 B, 函数 $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1} = \frac{x^2}{x^4+1} = f(x)$, 此时 $f(x)$ 为偶函数, 故 B 错误;

对于 C, 函数 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ 为周期函数, 显然不符合题意, 故 C 错误;

对于 D, 函数 $f(x) = x \ln(|x|+1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = -x \ln(|-x|+1) = -x \ln(|x|+1) = -f(x)$, 此时 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 D 错误.

5. C 【解析】对此类给图找解析式的题目, 一般优先考虑周期性、单调性、奇偶性等, 借助赋(特殊)值法处理.

对于 A, $f(x) = \frac{2^x+2^{-x}}{4|x|-3}$, 定义域为 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$, 又 $f(-x) = \frac{2^{-x}+2^x}{4|-x|-3} = \frac{2^x+2^{-x}}{4|x|-3} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 故 A 错误;

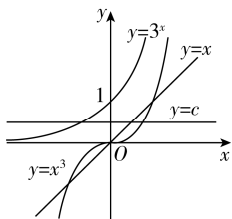
对于 B, 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{2^x-2^{-x}}{3-4x}$, 易知 $2^x-2^{-x} > 0$, $3-4x < 0$, 所以 $f(x) < 0$, 不符合题意, 故 B 错误;

对于 D, 当 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$,

由反比例型函数的性质可知, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 D 错误;

检验选项 C, $f(x) = \frac{2^x-2^{-x}}{4|x|-3}$ 满足图中性质, 故 C 正确. 故选 C.

6. B 【解析】易知 $c > 0$, 在同一平面直角坐标系中分别画出 $y = 3^x$, $y = x^3$, $y = x$, $y = c$ 的图象, 则 a 为 $y = 3^x$ 与 $y = c$ 图象交点的横坐标, b 为 $y = x^3$ 与 $y = c$ 图象交点的横坐标, c 为 $y = x$ 与 $y = c$ 图象交点的横坐标, 结合图象可知 $a < c < b$. 故选 B.



7. $(-1, 2)$ 【解析】根据飘带函数的图象特征可知, 函数

$f(x) = x - \frac{4}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $f(x)$ 为奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

由 $f(t^2+3) + f(-2t^2+t-1) > 0$, 得 $f(t^2+3) > -f(-2t^2+t-1)$, 即 $f(t^2+3) > f(2t^2-t+1)$,

因为 $t^2+3 > 0$, $2t^2-t+1 = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$, 所以 $t^2+3 > 2t^2-t+1$, 解得 $-1 < t < 2$, 所以不等式的解集为 $(-1, 2)$.

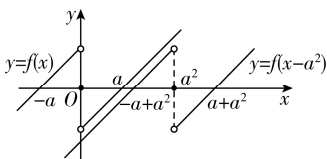
8. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ 【解析】当 $a=0$ 时, $f(x-a^2) \leq f(x)$ 显然恒成立.

当 $a \neq 0$ 时, $f(x-a^2) \leq f(x)$ 可以理解为将 $f(x)$ 的图象向右平

关键点

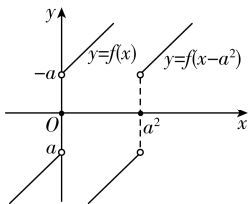
移 a^2 个单位长度后, 得到的 $f(x-a^2)$ 的图象始终在 $f(x)$ 的图象的下方(或重合).

当 $a > 0$ 时, 画出 $f(x)$ 和 $f(x-a^2)$ 的大致图象, 如图①, 需满足 $-a+a^2 \geq a$, 又 $a > 0$, 解得 $a \geq 2$;



图①

当 $a < 0$ 时, 画出 $f(x)$ 和 $f(x-a^2)$ 的大致图象, 如图②, $f(x-a^2)$ 的图象始终在 $f(x)$ 的图象的下方, 满足要求.



图②

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.



综合提分练

1. A 必刷考点 ①函数图象的识别

【解析】由题图得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且图象关于 y 轴对称, 即 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故排除 B, C;

对于 A, 当 $x=1$ 时, $e^{|x|} - \ln|x| = e$; 对于 D, 当 $x=1$ 时, $|x| - \ln|x| = 1$, 排除 D. 故选 A.

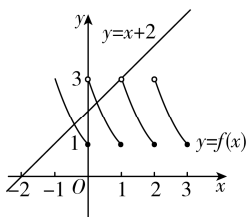
2. A 必刷考点 ②利用函数图象求参数的取值范围

【解析】在同一平面直角坐标系下作出函数 $y=f(x)$ 的大致图象及直线 $y=x+2$, 如图所示.

由图象可知, 当 $a < 2$ 时, 直线 $y=x+a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有且仅



有三个交点,故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2)$ (提示:注意端点处是否能取等).



3. B 必刷题型 ④ 函数图象的应用

【解析】函数 $f(x) = \left| ax + \frac{9}{x} + b \right| = \left| \frac{9}{x} - (-ax - b) \right|$ 在区间 $[1, 9]$ 上的最大值,可看作是函数 $g(x) = \frac{9}{x}$ 与 $y = -ax - b$ 在区间

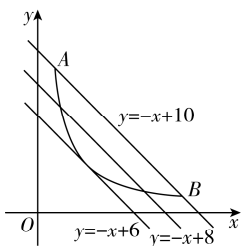
突破点

$[1, 9]$ 上函数值之差的绝对值的最大值.

函数 $g(x) = \frac{9}{x}$ 在区间 $[1, 9]$ 上的两个端点为 $A(1, 9), B(9, 1)$, 直线 AB 的方程为 $y = -x + 10$.

设与直线 AB 平行且与函数 $g(x) = \frac{9}{x}, x \in [1, 9]$ 图象相切的直线方程为 $y = -x + m$, $\because g'(x) = -\frac{9}{x^2}$, 令 $g'(x) = -1$, 解得 $x = 3$ 或 $x = -3$ (舍去), $\therefore$ 切点坐标为 $(3, 3)$, 代入直线方程 $y = -x + m$ 中, 可得 $m = 6$, 所以切线方程为 $y = -x + 6$.

由图象可知, 直线 $y = -ax - b$ 在函数 $g(x) = \frac{9}{x}, x \in [1, 9]$ 的图象的上方或下方时的 M 值大于直线 $y = -ax - b$ 与函数 $g(x) = \frac{9}{x}, x \in [1, 9]$ 的图象相交时的 M 值, 所以要使 M 取到最小值, 直线 $y = -ax - b$ 在直线 $AB: y = -x + 10$ 和直线 $y = -x + 6$ 的中间, 即直线 $y = -x + 8$, 此时 $a = 1, b = -8$, 所以 $a + b = -7$. 故选 B.



4. ABD 必刷考点 ④ 函数的对称性、函数图象的识别

【解析】由 $f(x)$ 与 $f(x+2)$ 均为奇函数, 得 $f(x+2) = -f(-x+2) = f(x-2)$, 则 $f(x) = f(x+4)$.

又 $g(x+4) = f(x+4) \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(x+4)\right] = f(x) \cdot \sin\frac{\pi x}{2} = g(x)$, 所以 4 为函数 $g(x)$ 的一个周期.

当 $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ 时, $g(x) = \frac{1 - \cos\frac{\pi x}{2}}{2}$, 此时 $g(x)$ 的最小正周期为 2, 且在 $(2k-1, 2k), k \in \mathbf{Z}$ 上单调递减, 在 $(2k, 2k+1), k \in \mathbf{Z}$ 上单调递增, 故 A 符合;

当 $f(x) = \tan\frac{\pi x}{4} (x \neq 4k+2, k \in \mathbf{Z})$ 时, $g(x) = 2\sin^2\frac{\pi x}{4} = 1 -$



$\cos \frac{\pi x}{2} (x \neq 4k+2, k \in \mathbf{Z})$, 此时 $g(x)$ 的最小正周期为 4, 且在 $(4k-2, 4k), k \in \mathbf{Z}$ 上单调递减, 在 $(4k, 4k+2), k \in \mathbf{Z}$ 上单调递增, 故 **B** 符合;

当 $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{\pi x}{2}} (x \neq 2k, k \in \mathbf{Z})$ 时, $g(x) = 1 (x \neq 2k, k \in \mathbf{Z})$, 故

D 符合;

若 $f(0)$ 存在, 即 $g(0)$ 存在, 则 $g(0) = f(0) \cdot \sin 0 = 0$, 故 **C** 不符合.

故选 ABD.

5.3 必刷考点 ① 函数图象的对称性、对勾函数的性质

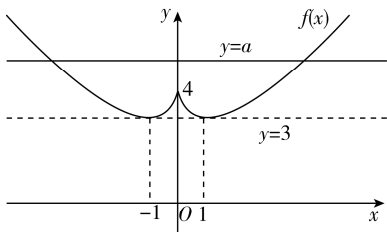
【解析】 $f(x) = |x| + \frac{4}{|x|+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(-x) = |-x| + \frac{4}{|-x|+1} = |x| + \frac{4}{|x|+1} = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = x + \frac{4}{x+1} = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 1 \geq$

$2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} - 1 = 3$, 当且仅当 $x+1 = \frac{4}{x+1}$, 即 $x=1$ 时, 等号

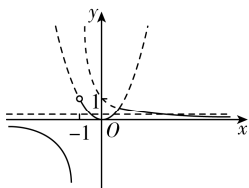
成立, 由对勾函数的性质可知, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且在 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最小值且 $f(x)_{\min} = f(1) = 3$.

由对称性可得 $f(-1) = 3$, 又 $f(0) = 4$, 结合偶函数的性质作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示. 因为 $f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个交点, 则 $a=3$ 或 $a>4$, 因此 a 的最小值为 3.



6. $(-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 3]$ 必刷考点 ② 函数的单调性、函数图象的应用、不等式有解问题

【解析】因为 $f(x) = \min\left\{x^2, \frac{1}{x+1}\right\}$, 所以 $f(x)$ 的图象是取 $y=x^2$ 与 $y=\frac{1}{x+1}$ 图象位于下方的部分, 作出 $y=f(x)$ 的大致图象, 如图所示(实线部分).



当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, 显然 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递减,

且 $f(x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

因为 $\exists x \in [1, 3]$, 使得关于 x 的不等式 $f(x) \leq f(t)$ 成立, 所



以 $f(t) \geq \frac{1}{4}$, 令 $x^2 = \frac{1}{4}$, 解得 $x = \pm \frac{1}{2}$, 结合图象可得 $f(t) \geq \frac{1}{4}$ 的解集为 $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$, 即实数 t 的取值范围是 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

7. $(-\infty, -5) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

必刷题型 ① 利用函数图象求参数取值范围

【解析】 当 $x > b$ 时, $f(x) = (x-b)^2$, 则 $f(x) \in (0, +\infty)$, 当 $x < b$ 时, $f(x) = \frac{1}{x-b}$, 则 $f(x) \in (-\infty, 0)$, 故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

若 $b=0$, 则方程 $ab+bf(x) = |b^2-3b|+1$ 可化为 $0=1$, 此时方程无解;

若 $b \neq 0$, 则方程 $ab+bf(x) = |b^2-3b|+1$ 可化为 $f(x) = \frac{|b^2-3b|+1-ab}{b}$,

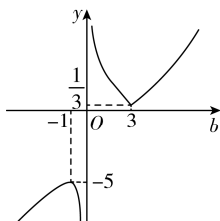
要使该方程无解, 需使 $\frac{|b^2-3b|+1-ab}{b} = 0$, 即 $a = \frac{|b^2-3b|+1}{b}$,

即关于 b 的方程 $a = \frac{|b^2-3b|+1}{b}$ 恰有两个不同的非零实根.

关键点

$$\text{令 } g(b) = \frac{|b^2-3b|+1}{b} = \begin{cases} b + \frac{1}{b} - 3, & b \geq 3 \text{ 或 } b < 0, \\ -b + \frac{1}{b} + 3, & 0 < b < 3, \end{cases} \quad \text{作出函数图象}$$

如图所示.



当 $b < 0$ 或 $b \geq 3$ 时, 函数 $g(b)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 且 $g(-1) = -2-3 = -5$, $g(3) = 3 + \frac{1}{3} - 3 = \frac{1}{3}$, 此时 $g(b) \in (-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$;

当 $0 < b < 3$ 时, 函数 $g(b)$ 在 $(0, 3)$ 上单调递减, 此时 $g(b) \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

要使得关于 b 的方程 $a = \frac{|b^2-3b|+1}{b}$ 恰有两个不同的非零实根, 即直线 $y=a$ 与函数 $g(b)$ 的图象恰有两个公共点, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, -5) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

8. $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2]$ **必刷考点** ② 函数图象的应用

【解析】 $f(x) = [2x+1] - x = [2x] + 1 - x$, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - [2x] = -kx + 1 - \frac{k}{2} \Leftrightarrow 2x - [2x] = -\frac{k}{2}(2x+1) + 1$.

令 $t = 2x$, 则 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow t - [t] = -\frac{k}{2}(t+1) + 1$, 直线 $y =$



$-\frac{k}{2}(t+1)+1$ 过定点 $A(-1,1)$, 斜率为 $-\frac{k}{2}$.

$y=t-[t]=t-n, t \in [n, n+1), n \in \mathbf{Z}$, 如图, 作出函数 $y=t-[t]$

和 $y=-\frac{k}{2}(t+1)+1$ 的大致图象,

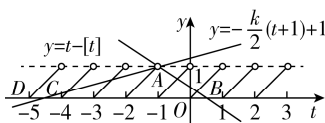
其中 $O(0,0), A(-1,1), B(1,0), C(-4,0), D(-5,0)$,

则 $k_{AO}=-1, k_{AB}=-\frac{1}{2}, k_{AC}=\frac{1}{3}, k_{AD}=\frac{1}{4}$,

依题意, $k_{AO} \leq -\frac{k}{2} < k_{AB}$ 或 $k_{AD} < -\frac{k}{2} \leq k_{AC}$,

$\therefore -1 \leq -\frac{k}{2} < -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4} < -\frac{k}{2} \leq \frac{1}{3}, \therefore -\frac{2}{3} \leq k < -\frac{1}{2}$ 或 $1 < k \leq$

2, 即实数 k 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2]$.



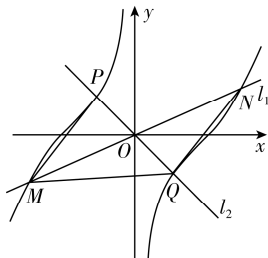
真题风向练

9.2√2 命题点 函数图象的应用, 函数的单调性、奇偶性

【解析】依题意, $y=x^3-\frac{2}{x}, x \neq 0$, 易知为奇函数, 所以曲线 C

的图象关于原点对称, 当 $x>0$ 时, 函数 $y=x^3-\frac{2}{x}$ 单调递增

(提示: 增函数-减函数=增函数), 由此作出曲线 C 的大致图象如图所示.



两条直线 l_1, l_2 均过坐标原点 O , 所以 M, N 两点关于原点对称, P, Q 两点关于原点对称,

根据对称性, 不妨设 M, N, P, Q 位置如图所示, 则 $OP=OQ$, $OM=ON$, $\angle POM=\angle QON$, 所以 $\triangle OPM \cong \triangle OQN$ (SAS), 所以

$$S_{\triangle OQN} = S_{\triangle OPM} = \sqrt{2},$$

而 $\triangle OQM$ 和 $\triangle OQN$ 等底同高 (提示: $OM=ON$, 高均为过点 Q 作 MN 的垂线所得的垂线段), 所以面积相同, 所以 $S_{\triangle MNQ} =$

$$2S_{\triangle OQN} = 2\sqrt{2}.$$

第5节 函数与方程



题型上分练

1. C 【解析】由 $x+\ln x=8$, 得 $x-8+\ln x=0, x>0$,

因为函数 $y=x-8, y=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)=x-8+\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $f(6)=-2+\ln 6=-\ln e^2+\ln 6=\ln \frac{6}{e^2} < \ln 1=0, f(7)=$

$$-1+\ln 7=-\ln e+\ln 7=\ln \frac{7}{e} > \ln 1=0,$$



则函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点 x_0 , 且 $x_0 \in (6, 7)$ (提示: 零点存在定理的应用), 故 $n=6$. 故选 C.

2. C 【解析】函数 $f(x) = e^x + \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因为函数 $y = e^x, y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $0 < a < b < c$, 所以 $f(c) > f(b) > f(a)$. 又因为 $f(a)f(b)f(c) > 0$, 所以 $f(c) > 0 > f(b) > f(a)$ 或 $f(c) > f(b) > f(a) > 0$,

若 $f(c) > 0 > f(b) > f(a)$, 由函数零点存在定理得 $x_0 \in (b, c)$;

若 $f(c) > f(b) > f(a) > 0$, 结合 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 由函数零点存在定理得 $x_0 < a$,

综上所述, $x_0 < c$ 一定正确. 故选 C.

3. A 【解析】由 $f(x) = x \ln x - 1 = 0$, 得 $\ln x = \frac{1}{x}$, 即函数 $y = \ln x$

与 $y = \frac{1}{x}$ 的图象交点的横坐标是 a , 因为 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$

上单调递增, 且过点 $(1, 0)$, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则

$a > 1$;

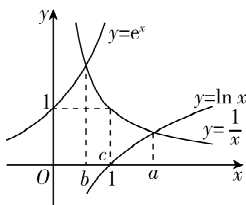
由 $g(x) = xe^x - 1 = 0$, 得 $e^x = \frac{1}{x}$, 即函数 $y = e^x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 的图象

交点的横坐标是 b , 因为 $y = e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且过点 $(0,$

$1)$, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且过点 $(1, 1)$, 则 $0 < b < 1$;

由 $h(x) = x\sqrt{x} - 1 = 0$, 得 $x^{\frac{3}{2}} = 1$, 解得 $x = 1$, 即 $c = 1$.

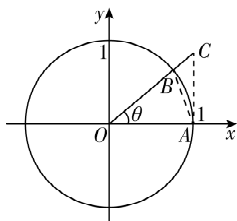
综上, $b < c < a$. 故选 A.



4. ACD 【解析】根据 $f(x) = 0$, 可得 $x \cos x = \sin x$, 当 $\cos x = 0$ 时, $\sin x \neq 0$, 不符题意, 故 $\cos x \neq 0$,

因此 $f(x) = 0$ 等价于 $x = \tan x \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right)$.

对于 A: 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 时, $\cos x > 0$, 则 $f(x) = x \cos x - \sin x = (x - \tan x) \cos x$.



图①

如图①, 在平面直角坐标系中作单位圆, 与 x 轴正半轴交于点 A , 则 $A(1, 0)$, 设点 B 在圆上, $\angle AOB = \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, 过点

A 作 AC 垂直于 x 轴, 交射线 OB 于点 C , 连接 AB ,

由三角函数的定义可知, $AC = \tan \theta$, 设扇形 OAB 的面积为 S_1 ,



则 $S_1 = \frac{1}{2}\theta$, $S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}\tan \theta$, 易知 $S_{\triangle OAC} > S_1$, 即 $\frac{1}{2}\tan \theta > \frac{1}{2}\theta$,

得 $\tan \theta > \theta$, 即当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\tan x > x$, 又因为 $\cos x > 0$, 所

关键点

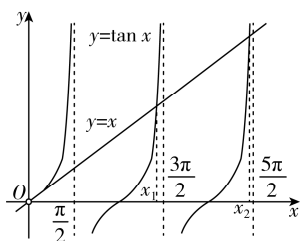
以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) = (x - \tan x) \cos x < 0$, 故 **A** 正确;

对于 **B**: 在同一平面直角坐标系下画出函数 $y = \tan x$, $x \in$

$\left\{x \mid 0 < x < \frac{5\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{2} \text{ 且 } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$ 与 $y = x$ 的图象, 如图②,

则 x_1, x_2 分别为两图象交点的横坐标, 不妨设 $x_1 < x_2$, 由图②

可知 $x_1 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $x_2 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$, 故 $x_1 + x_2 > 3\pi$, 故 **B** 错误;



图②

对于 **C**: $y = \tan x$ 的最小正周期为 π , 且由图②可知 $\tan x_2 > \tan x_1$,

故 x_1, x_2 之间的距离大于 π , 即 $x_2 - x_1 > \pi$, 故 **C** 正确;

对于 **D**: 由 $x_1 = \tan x_1$, $x_2 = \tan x_2$, 可得 $x_1 \sin x_2 + x_2 \sin x_1 =$

$$\tan x_1 \sin x_2 + \tan x_2 \sin x_1 = \frac{\sin x_1 \sin x_2 (\cos x_1 + \cos x_2)}{\cos x_1 \cos x_2},$$

因为 $x_1 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $x_2 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$, 且由 **C** 可知 $x_2 - \pi > x_1$,

故有 $\sin x_1 < 0$, $\cos x_1 < 0$, $\sin x_2 > 0$, $\cos x_2 > 0$, 则 $\sin x_1 \sin x_2 < 0$, $\cos x_1 \cos x_2 < 0$,

而 $\cos x_1 + \cos x_2 = \cos x_1 - \cos(x_2 - \pi)$ (提示: 已知 $x_2 - \pi > x_1$, 所以将 $\cos x_2$ 转化为 $-\cos(x_2 - \pi)$),

又因为 $\frac{3\pi}{2} > x_2 - \pi > x_1 > \pi$, 且 $y = \cos x$ 在 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

故 $\cos x_1 - \cos(x_2 - \pi) < 0$,

则 $\cos x_1 + \cos x_2 = \cos x_1 - \cos(x_2 - \pi) < 0$,

故 $x_1 \sin x_2 + x_2 \sin x_1 = \frac{\sin x_1 \sin x_2 (\cos x_1 + \cos x_2)}{\cos x_1 \cos x_2} < 0$, 故 **D** 正

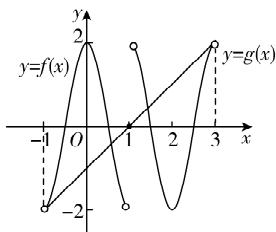
确. 故选 **ACD**.

5.5 【解析】函数 $g(x) = x - 1$ ($-1 \leq x \leq 3$) 的图象是中心对称图形, 对称中心为 $(1, 0)$.

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f(2-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为 y 轴, 对称中心为 $(1, 0)$.

当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = 2\cos \pi x$, 当 $x = 1$ 时, $f(1) = -f(2-1)$, 解得 $f(1) = 0$, 由题意可得 $f(-1) = f(1) = 0$, $f(-1) = -f(3)$, 所以 $f(-1) = f(3) = 0$, 而 $g(-1) = -2$, $g(3) = 2$, 所以当 $x = -1$ 或 3 时, 两函数图象无交点.

在同一平面直角坐标系内作出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-1, 3)$ 上的大致图象如图所示.



当 $x \in [2, 3)$ 时, $x-2 \in [0, 1)$, 则 $f(x) = -f(2-x) = -f(x-2) = -2\cos[\pi(x-2)]$,

令 $p(x) = g(x) - f(x) = x - 1 + 2\cos[\pi(x-2)]$, $x \in [2, 3)$, 则

$p'(x) = 1 - 2\pi\sin[\pi(x-2)]$, 且 $p'(3) = 1 > 0$, $p'\left(\frac{5}{2}\right) = 1 - 2\pi <$

0 , 所以存在 $x_0 \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$, 使得 $p'(x_0) = 0$, 易知 $p'(x)$ 在

$\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ 上单调递增, 所以当 $x \in (x_0, 3)$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 单

调递增, 所以当 $x \in (x_0, 3)$ 时, $p(x) < p(3) = 0$, 即 $g(x) < f(x)$.

结合图象可得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 5 个交点, 又点 $(1, 0)$ 是 $f(x)$ 图象的对称中心, 也是 $g(x)$ 图象的对称中心, 则两函数图象所有交点的横坐标之和为 5.

6. A 【解析】先确定 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数, 从而确定在 $[-\pi, 0]$ 上的零点个数.

$x > 0$ 时, $f(x) = \ln x + x$, 函数 $y = \ln x$, $y = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递增, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{1}{e} < 0$, $f(1) = 1 > 0$, 则存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 1 个零点,

由函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, +\infty)$ 上有 4 个零点, 得函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, 0]$ 上有 3 个零点,

因为 $-\pi \leq x \leq 0$, $\omega > 0$, 所以 $-\pi\omega - \frac{\pi}{3} \leq \omega x - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{3}$, 故 $-4\pi <$

$-\omega\pi - \frac{\pi}{3} \leq -3\pi$ (提示: 注意端点处是否可以取等), 解得

$\frac{8}{3} \leq \omega < \frac{11}{3}$, 所以正数 ω 的取值范围是 $\left[\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)$. 故选 A.

7. C 【解析】由题意得, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1 + \log_a x$, 该函数图象由函数 $y = \log_a x$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调, 因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 1 个零点,

所以当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + ax + 3$ 只有 1 个负零点.

关键点

因为 $f(x) = x^2 + ax + 3$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -\frac{a}{2} < 0$, $f(0) = 3 > 0$,

所以要使 $f(x) = x^2 + ax + 3$ 只有 1 个负零点, 则 $\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$,

解得 $a = 2\sqrt{3}$ 或 $a = -2\sqrt{3}$ (舍去), 故 $a = 2\sqrt{3}$. 故选 C.

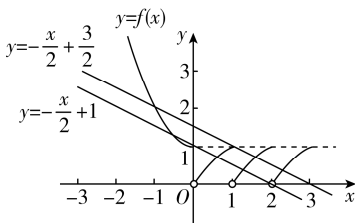
8. B 【解析】由对任意 $x \geq 0$ 都有 $f(x) = f(x+1)$, 可知当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 的周期为 1.

在同一平面直角坐标系中作出 $y = f(x)$, $y = -\frac{x}{2} + 1$ 与 $y =$

$-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ 的大致图象如图所示, 则 $y = -\frac{x}{2} + m$, $m \in$



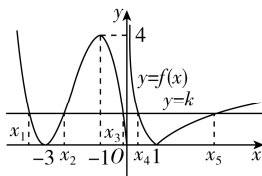
$\left[1, \frac{3}{2}\right]$ 对应的直线在直线 $y = -\frac{x}{2} + 1$ 与直线 $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ 之间, 且包含直线 $y = -\frac{x}{2} + 1$ 与直线 $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$. 由图象可知 $y = f(x)$ 与 $y = -\frac{x}{2} + m, m \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ 的图象恒有 4 个交点, 故选 B.



9. D 【解析】当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -x(x+3)^2 = -x^3 - 6x^2 - 9x, f'(x) = -3x^2 - 12x - 9 = -3(x+3)(x+1)$, 所以当 $x \in (-\infty, -3)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-3, -1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, $f(-3) = 0, f(-1) = 4$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = |\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示, 由图可得 $0 < k < 4$.



当 $x \leq 0$ 时, 令 $-x(x+3)^2 = 4$, 解得 $x = -4$ 或 $x = -1$, 当 $x > 0$ 时, 令 $|\ln x| = 4$ 得 $x = e^{-4}$ 或 $x = e^4$, 所以 $-4 < x_1 < -3 < x_2 < -1 < x_3 < 0 < x_4 < 1 < x_5 < e^4$,

又因为 $|\ln x_4| = |\ln x_5|$, 所以 $-\ln x_4 = \ln x_5$, 所以 $\ln x_4 + \ln x_5 = \ln x_4 x_5 = 0$, 所以 $x_4 x_5 = 1$.

由题意可得 x_1, x_2, x_3 是方程 $k = -x^3 - 6x^2 - 9x$, 即 $x^3 + 6x^2 + 9x + k = 0$ 的 3 个根,

所以 $x^3 + 6x^2 + 9x + k = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, 即 $x^3 + 6x^2 + 9x + k = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$,

所以 $k = -x_1x_2x_3$, 即 $x_1x_2x_3 = -k \in (-4, 0)$, 所以 $\frac{x_1x_2x_3}{x_4x_5} = x_1x_2x_3 = -k \in (-4, 0)$. 故选 D.

10. (5, 7] 【解析】当 $0 < x < a$ 时, 令 $\sin \frac{\pi(x+1)}{2} = 0$, 则 $\frac{\pi(x+1)}{2} = k\pi, k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $x = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*$, 此时零点为正奇数 $1, 3, 5, 7, \dots$.

当 $x \geq a$ 时, $f(x) = x^2 - 2ax + 1 = (x - a)^2 - a^2 + 1$, 此时 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 最多有一个零点.

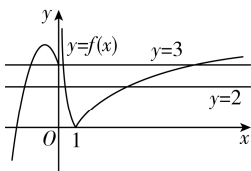
因为 $f(x)$ 恰有四个不同零点, 所以 $\sin \frac{\pi(x+1)}{2} = 0$ 在 $(0, a)$

上至少有三个零点, 故 $a > 5$, 此时 $f(a) = 1 - a^2 < 0, f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有且仅有一个零点, 所以当 $0 < x < a$ 时, $f(x)$ 的图象与 x 轴有三个交点, 需满足 $5 < a \leq 7$, 所以实数 a 的取值范围为

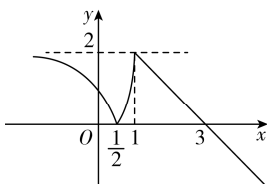


(5, 7].

- 11. C** 【解析】令 $[f(x)]^2 - 5f(x) + 6 = 0$, 则有 $f(x) = 2$ 或 $f(x) = 3$, 作出 $y = f(x)$, $y = 2$, $y = 3$ 的大致图象, 如图所示. 因为直线 $y = 2$ 与 $y = f(x)$ 的图象有 3 个交点, 直线 $y = 3$ 与 $y = f(x)$ 的图象有 4 个交点, 所以函数 $y = [f(x)]^2 - 5f(x) + 6$ 有 7 个零点. 故选 C.



- 12. $(-3, -2\sqrt{2})$** 【解析】作出 $f(x) = \begin{cases} |4^x - 2|, & x < 1, \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的图象如图所示.



由图可知 $f(x) = t$ (t 为常数) 最多有三个根, 所以 $g(x) = x^2 + ax + 2$ 有两个零点, 此时 $\Delta = a^2 - 8 > 0$, 即 $a > 2\sqrt{2}$ 或 $a < -2\sqrt{2}$, 设 $g(x) = x^2 + ax + 2$ 有两个零点 t_1, t_2 . 要想 $y = g(f(x))$ 有六个零点, 结合函数图象, 则 $f(x) = t_1$ 和 $f(x) = t_2$ 分别有三个不同的解, 则 $t_1, t_2 \in (0, 2)$ 且 $t_1 \neq t_2$ (易错: 要注意函数 $y = |4^x - 2|$).

$21 \left(x < \frac{1}{2} \right)$ 的图象的渐近线为直线 $y = 2$).

则要满足 $\begin{cases} \Delta = a^2 - 8 > 0, \\ 0 < -\frac{a}{2} < 2, \\ g(2) > 0, \\ g(0) > 0, \end{cases}$ 解得 $-3 < a < -2\sqrt{2}$, 故实数 a 的取值

范围为 $(-3, -2\sqrt{2})$.



综合提分练

- 1. C** 必刷考点 ⊙ 函数的零点、函数的奇偶性

【解析】由于 $f(x)$ 有唯一的零点, 所以 $f(x+1)$ 也有唯一的零点. 由于 $y = x^2 - 1$, $y = a(e^x + e^{-x})$ 均为偶函数, 所以 $g(x) = f(x+1)$ 为偶函数, 因此 $g(0) = f(1) = -1 + 2a = 0$, 故 $a = \frac{1}{2}$. 故选 C.

- 2. A** 必刷题型 ⊙ 函数新定义问题、函数与方程

【解析】因为函数 $y = e^x$, $y = -e^{-x}$, $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ 均在 $\mathbf{R}$

上为增函数, 所以 $f(x) = e^x - e^{-x} + x|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且

关键点

$f(0) = 0$, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 唯一的零点.

要使 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为“ π 亲近函数”, 则存在 $x_2 - 0 \in (-\pi, \pi)$, 使得 $g(x_2) = f(0) = 0$, 即 $g(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内存在零点, 所以方程 $a \sin x = -\cos^2 x + 3 = \sin^2 x + 2$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上有解.

令 $\sin x = t$, 则 $t \in [-1, 1]$, 故 $at = t^2 + 2$,

易知 $t = 0$ 不是此方程的解, 当 $t \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ 时, 有 $a =$



$t + \frac{2}{t}$, 由对勾函数的性质可知 $t + \frac{2}{t} \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, 故 a 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$. 故选 A.

3. ACD 必刷题型 ⊙ 函数新定义问题、函数的零点问题

【解析】依题意, $f(x) - g(x) = \frac{2}{x}$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) < g(x)$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > g(x)$,

$$\text{则 } m(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x - \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases} \quad M(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x + \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

对于 A, $m(1) + M(-1) = 0 + 0 = 0$, A 正确.

$$\text{对于 B, } m(x) - 2x = \begin{cases} \frac{1}{x} - x, & x < 0, \\ -\frac{1}{x} - x, & x > 0, \end{cases} \quad \text{由 } m(x) - 2x = 0, \text{ 解得 } x =$$

-1 , B 错误.

对于 C, $m(x)M(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, 令 $h(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$, 则 $h(x)$

的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $h(-x) = (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2} = h(x)$, 所以函数 $h(x)$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称, C 正确.

对于 D, 由 $[m(x) - \sqrt{a}][M(x) - \sqrt{a}] = 0$, 得 $m(x) = \sqrt{a}$ 或 $M(x) = \sqrt{a}$, 而 $\sqrt{a} \geq 0$, 则 $m(x) = \sqrt{a} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \sqrt{a} (x > 0)$, 即 $x^2 - \sqrt{a}x - 1 = 0$, 该方程有且仅有一个正根 x_1 ; $M(x) = \sqrt{a} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \sqrt{a} (x < 0)$ 或 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{a} (x > 0)$, 又 $x - \frac{1}{x} = \sqrt{a} (x < 0) \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{a}x - 1 = 0 (x < 0)$, 该方程有且仅有一个负根 x_2 , 且 $x_1x_2 = -1$, 又 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{a} (x > 0) \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{a}x + 1 = 0 (x > 0)$, 该方程要么无解, 要么有一个根 $x_0 = 1$, 要么有两个正根 x_3, x_4 , 且 $x_3x_4 = 1$, 所以关于 x 的方程 $[m(x) - \sqrt{a}][M(x) - \sqrt{a}] = 0$ 的所有解的乘积为 -1 , D 正确. 故选 ACD.

4. ABD 必刷考点 ⊙ 函数性质的综合应用、求函数零点的个数

【解析】因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称, 所以 $f(-x) = f(x-4)$, 又 $f(x) + f(-x) = -2$, 所以 $f(x) + f(x-4) = -2$, 则 $f(x-4) + f(x-8) = -2$, 两式相减得 $f(x) = f(x-8)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 8, 所以 $f(2025) = f(8 \times 253 + 1) = f(1) = \frac{1}{2}$, 故 A 正确;

当 $x \in (-2, 0)$ 时, $-x \in (0, 2)$, 所以 $f(-x) = -\frac{1}{2}x = -2 - f(x)$,

所以 $f(x) = -2 + \frac{1}{2}x$, 当 $x \in (2, 4)$ 时, $x-4 \in (-2, 0)$, 所以

$f(x-4) = -2 + \frac{1}{2}(x-4) = -2 - f(x)$, 所以 $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, 所以

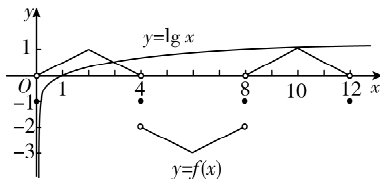
$f(x)$ 在 $(2, 4)$ 上单调递减, 故 B 正确;

由 $f(x) + f(-x) = -2$ 得 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, -1)$ 对称, 故 C 错误;

函数 $y = f(x) - \lg x$ 的零点个数可以转化为 $y = f(x)$ 与 $y = \lg x$



图象的交点个数,作出 $y=f(x)$ 与 $y=\lg x$ 的大致图象,由此可得 $y=f(x)$ 与 $y=\lg x$ 的图象有 2 个交点,所以 $y=f(x)-\lg x$ 有 2 个零点,故 **D** 正确. 故选 ABD.



5. C 必刷考点 ⊙ 已知零点个数求参数取值范围

【解析】∵ 函数 $f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x - |x - \cos \theta| - \sin \theta$ 在区间 $[0, 2]$ 上有且只有一个零点,

∴ 方程 $\frac{1}{\pi} \sin \pi x - |x - \cos \theta| - \sin \theta = 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上有且只有一个解,

∴ 方程 $\frac{1}{\pi} \sin \pi x = |x - \cos \theta| + \sin \theta$ 在区间 $[0, 2]$ 上有且只有一个解.

设 $g(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$, $h(x) = |x - \cos \theta| + \sin \theta$,

则问题转化为 $g(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$ 与 $h(x) = |x - \cos \theta| + \sin \theta$ 的

关键点

图象在 $[0, 2]$ 上有且只有一个交点.

∵ $g(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

∴ 在 $[0, 2]$ 内, $g(x)$ 的图象为一个最小正周期内的图象,

∵ $g(0) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi \times 0) = 0$, $g(2) = g(0) = 0$,

∴ 当 $0 \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2}$, 即 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, $g(x)$ 单调递增;

当 $\frac{\pi}{2} < \pi x \leq \frac{3\pi}{2}$, 即 $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$ 时, $g(x)$ 单调递减;

当 $\frac{3\pi}{2} < \pi x \leq 2\pi$, 即 $\frac{3}{2} < x \leq 2$ 时, $g(x)$ 单调递增;

∴ $g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}$,

∴ $g(x)_{\min} = g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{\pi}$,

$h(x) = |x - \cos \theta| + \sin \theta$ 的图象是将函数 $y = |x|$ 的图象沿 x 轴

关键点

平移 $|\cos \theta|$ 个单位长度 ($\cos \theta > 0$ 向右平移, $\cos \theta < 0$ 向左平移), 再沿 y 轴平移 $|\sin \theta|$ 个单位长度 ($\sin \theta > 0$ 向上平移, $\sin \theta < 0$ 向下平移) 得到的,

∴ $g(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x$ 与 $h(x) = |x - \cos \theta| + \sin \theta$ 的图象在 $[0, 2]$

上有且只有一个交点,

∴ $\begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{\pi}, \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \cos \theta < 0, \text{ 或 } \begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \cos \theta > 0, \text{ 或 } \begin{cases} \sin \theta = -1, \\ \cos \theta = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \cos \theta = 1, \\ \sin \theta = 0. \end{cases}$

当 $\begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{\pi}, \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ 时, 无解;



$$\text{当} \begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \cos \theta < 0, \text{时, 即} \\ h(0) \leq 0 \end{cases} \begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \cos \theta < 0, \\ |-\cos \theta| + \sin \theta \leq 0, \end{cases} \quad \text{又 } \theta \in (0, 2\pi), \text{解得}$$

$$\theta \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$\text{当} \begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \cos \theta > 0, \text{时, 即} \\ h(0) < 0 \end{cases} \begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \cos \theta > 0, \\ |-\cos \theta| + \sin \theta < 0, \end{cases} \quad \text{又 } \theta \in (0, 2\pi), \text{解得}$$

$$\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right);$$

$$\text{当} \begin{cases} \sin \theta = -1, \\ \cos \theta = 0 \end{cases} \text{时, 又 } \theta \in (0, 2\pi), \text{解得 } \theta = \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{当} \begin{cases} \cos \theta = 1, \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \text{时, 无解.}$$

综上所述, $\theta \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$. 故选 C.

6. $(0, \ln 3]$ 必刷题型 ⊙ 分段函数、复合函数的零点问题

【解析】函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0, \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) \leq 2$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$,

当 $x+2 \leq 0$, 即 $x \leq -2$ 时, $f(f(x)) = (x+2) + 2 = x+4$, 且 $f(f(x)) \leq 2$,

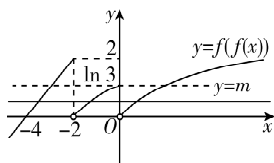
当 $-2 < x \leq 0$, 即 $0 < f(x) \leq 2$ 时, $f(f(x)) = \ln[(x+2)+1] = \ln(x+3)$, 且 $f(f(x)) \leq \ln 3$,

当 $x > 0$, 即 $f(x) > 0$ 时, $f(f(x)) = \ln[\ln(x+1)+1]$, 且 $f(f(x)) > 0$,

$$\text{因此 } f(f(x)) = \begin{cases} x+4, & x \leq -2, \\ \ln(x+3), & -2 < x \leq 0, \\ \ln[\ln(x+1)+1], & x > 0, \end{cases} \quad \text{在平面直角坐标系内}$$

作出直线 $y=m$ 和函数 $y=f(f(x))$ 的大致图象, 如图所示. 若关于 x 的方程 $f(f(x))=m$ 恰有三个不相等的实数根, 则 $0 < m \leq \ln 3$.

所以实数 m 的取值范围是 $(0, \ln 3]$.



7. $\left[\frac{1+\ln 2}{4}, 1 \right)$ 必刷考点 ⊙ 函数图象的应用、已知方程根的个数求参数范围

【解析】 $\frac{|x|}{e^{mx^2-1}} = 1 (x \neq 0) \Leftrightarrow \ln|x| + 1 - mx^2 = 0 (x \neq 0)$.

令 $h(x) = \ln|x| + 1 - mx^2, x \neq 0$, 则 $h(-x) = h(x)$,

所以 $h(x)$ 为偶函数, 所以只需考虑 $x > 0$ 时的情况,

突破点

即研究 $h(x) = \ln x + 1 - mx^2$ 有两个零点 c, d , 且在区间 (c, d) 上存在唯一的整数的情况.

当 $x > 0$ 时, 令 $h(x) = 0$, 得 $\frac{\ln x + 1}{x^2} = m$.

令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$, 则 $g'(x) = -\frac{2\ln x + 1}{x^3}$,



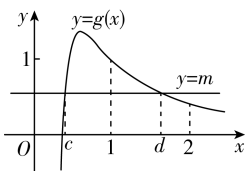
当 $x \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ 上单调递增;

当 $x \in (e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 上单调递减. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$.

因为在区间 (c, d) 上存在唯一的整数, 且 $0 < e^{-\frac{1}{2}} < 1$, 所以

$$g(2) \leq m < g(1), \text{ 即 } \frac{1+\ln 2}{4} \leq m < 1.$$

所以 m 的取值范围为 $\left[\frac{1+\ln 2}{4}, 1\right)$.

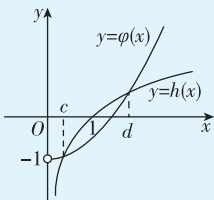


一题多解

(转化为两个函数图象的交点) 由 $\frac{|x|}{e^{mx^2-1}} = 1 (x \neq 0)$

0), 得 $|x| = e^{mx^2-1} (x \neq 0) \Leftrightarrow \ln|x| = mx^2 - 1 (x \neq 0)$.

令 $h(x) = \ln|x|, x \neq 0, \varphi(x) = mx^2 - 1, x \neq 0$, 两函数均为偶函数, 所以只需考虑 $x > 0$ 时, $h(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的图象有两个交点 $(c, h(c)), (d, h(d))$, 且在区间 (c, d) 上存在唯一一整数.



如图, 作 $h(x), \varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图象, 根据图象易得

$$1 < d \leq 2, \text{ 所以 } \begin{cases} \ln 2 \leq 4m - 1, \\ m - 1 < 0, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1+\ln 2}{4} \leq m < 1, \text{ 所以 } m \text{ 的}$$

取值范围为 $\left[\frac{1+\ln 2}{4}, 1\right)$.

真题风向练

8. $(4, +\infty)$ 命题点 ① 函数与方程

【解析】 函数 $f(x) = 2^x + 2^{2-x} - m$ 有两个零点, 即方程 $2^x + 2^{2-x} = m$ 有两个不同的实数根. 令 $t = 2^x > 0$, 方程化为 $t + \frac{4}{t} = m$, 即 $t^2 - mt + 4 = 0$ (提示: 通过换元转化成一元二次方程根的问题), 又 $t > 0$, 所以方程 $t^2 - mt + 4 = 0$ 有两个不同的正根 t_1, t_2 , 则 $\Delta = m^2 - 16 > 0$, 可得 $|m| > 4$, 且 $t_1 + t_2 = m > 0$, 故 $m > 4$, 即 m 的取值范围为 $(4, +\infty)$.

一题多解

令 $g(x) = 2^x + 2^{2-x}$, 则 $g(x) = 2^x + 4 \cdot 2^{-x}$. $f(x)$ 有两个零点, 即方程 $g(x) = m$ 有两个不同的实数根. 易知 $2^x > 0, 4 \cdot 2^{-x} > 0$, 由基本不等式得 $2^x + 4 \cdot 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 4 \cdot 2^{-x}} = 4$, 当且仅当 $2^x = 4 \cdot 2^{-x}$, 即 $x = 1$ 时等号成立, 且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$. 故当 $m > 4$ 时, 方程 $g(x) = m$ 有两个不同的实数根, 故 m 的取值范围为 $(4, +\infty)$.



第6节 函数模型及其应用



题型上分练

1. B 【解析】由题意,新设备生产的产品可获得的年平均利润

$$y = \frac{s}{t} = \begin{cases} -2t - \frac{98}{t} + 50, & t < 8, \\ -t^2 + 10t - 2, & t \geq 8, \end{cases}$$

当 $t < 8$ 时, $2t + \frac{98}{t} \geq 28$, 当且仅当 $t = 7$ 时, 等号成立, 则 $-2t - \frac{98}{t} + 50 \leq 22$, 所以当 $t = 7$ 时, $\frac{s}{t}$ 取得最大值, 且最大值为 22;

当 $t \geq 8$ 时, $-t^2 + 10t - 2 = -(t-5)^2 + 23$, 所以函数 $y = -t^2 + 10t - 2$

在 $[8, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $t = 8$ 时, $\frac{s}{t}$ 取得最大值, 且最大值为 14. 故当新设备生产的产品可获得的年平均利润最大时, 新设备运行的时间 $t = 7$. 故选 B.

2. B 【解析】由题可知, 首款芯片的晶体管数目 $N_0 = n_0 \cdot a^0$, 则 $2N_0 = n_0 \cdot a^{18}$, 得 $a^{18} = 2$, 即 $a = 2^{\frac{1}{18}}$;

首款芯片推出时单个晶体管的价格 $Y_0 = m_0 \cdot b^0$,

则 $\frac{1}{2}Y_0 = m_0 \cdot b^{12}$, 得 $b^{12} = \frac{1}{2}$, 即 $b = 2^{-\frac{1}{12}}$.

设首款芯片的价格为 $W_0 = N_0 \cdot Y_0 = n_0 m_0 \cdot a^0 \cdot b^0 = n_0 m_0$,

则第 6 个月时推出的改进型号芯片的价格 $W_1 = N_1 \cdot Y_1 = n_0 \cdot a^6 \cdot m_0 \cdot b^6$,

则 $\frac{W_1}{W_0} = \frac{n_0 \cdot a^6 \cdot m_0 \cdot b^6}{n_0 \cdot m_0} = (2^{\frac{1}{18}})^6 \cdot (2^{-\frac{1}{12}})^6 = 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$. 故选 B.

3. D 【解析】因为对折次数 $n \leq \log_8 \left(\frac{100}{0.05} \right)^2 = 2 \log_8 2000 = \frac{2 \lg 2000}{\lg 8} = \frac{2(\lg 2 + \lg 1000)}{\lg 8} = \frac{2(\lg 2 + 3)}{3 \lg 2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{\lg 2} \approx 7.3$, 所以这张纸最多能对折 7 次. 因为对折 n 次后, 纸张的厚度为 $2^n x$, 所以这张纸经过对折后的最大厚度为 $2^7 \times 0.05 = 6.4$ (cm). 故选 D.

4. ABD 【解析】记 E_i 表示震级为 i 级地震时释放的能量.

对于 A, 若 $M \leq 2$, 则 $\lg E = 4.8 + 1.5M \leq 7.8$, 所以 $E \leq 10^{7.8} < 10^8$, 故 A 正确;

对于 B, 若 $M > 4$, 则 $\lg E = 4.8 + 1.5M > 10.8$, 所以 $E > 10^{10.8} > 10^{10}$, 故 B 正确;

对于 C, $\lg E_5 - \lg E_4 = 4.8 + 1.5 \times 5 - 4.8 - 1.5 \times 4 = 1.5$, 则 $\frac{E_5}{E_4} = 10^{1.5} \neq 100$, 故 C 错误;

对于 D, $\lg E_3 - \lg E_7 = 4.8 + 1.5 \times 3 - 4.8 - 1.5 \times 7 = -6$, 则 $\frac{E_3}{E_7} = \frac{1}{10^6}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

5. 36 【解析】根据题意, 所给模型中 $y_0 \approx 20$, $N = 1020$, $p = 10\% = 0.1$, $x = 6$, 则 2030 年年底该地区光伏太阳能板的保有



$$\text{量 } y \approx \frac{1\,020}{1 + \left(\frac{1\,020}{20} - 1\right) e^{-0.1 \times 6}} = \frac{1\,020}{1 + 50e^{-0.6}}.$$

因为 $e^{-0.6} \approx 0.55$, 所以 $y \approx \frac{1\,020}{1 + 50 \times 0.55} \approx 36$, 所以 2030 年年底该地区光伏太阳能板的保有量约为 36 万块.

6. B 【解析】设氡含量变成初始量的 $\frac{1}{10\,000}$ 大约需要经过 t

年, 则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12}} = \frac{1}{10\,000}$, $\frac{t}{12} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10\,000}$, 即 $t = \frac{48}{\lg 2} \approx 159$, 故选 B.

7. D 【解析】由题表中数据可知函数模型满足: ①在定义域内单调递减且单位减少量随 l 增大而逐渐减小; ②函数图象过点 $(0, W_0)$.

函数 $W = 0.5W_0 l$ 和 $W = W_0 \cdot \log_{0.5}(l+1)$ 的图象不过点 $(0, W_0)$, 不符合条件, 故 B, C 错误;

函数 $W = W_0 + 0.5l$ 在定义域内单调递增, 故 A 错误;

$W = W_0 \cdot (0.5)^l$ 满足上述条件, 故 D 正确. 故选 D.

8. B 【解析】总利润 $f(x) = x\left(\frac{800}{x+2} - 3\right) - (100 + 13x) = 732 -$

$$\frac{1\,600}{x+2} - 16(x+2) \leq 732 - 2\sqrt{\frac{1\,600}{x+2} \times 16(x+2)} = 412, \text{ 当且仅当}$$

$\frac{1\,600}{x+2} = 16(x+2)$, 即 $x = 8$ 时, $f(x)$ 最大, 故总利润最大时的产量为 8 万件. 故选 B.

真题风向练

9. B 命题点 ①对数运算的实际应用

【解析】由题意得训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时, 训练时间增加 20 h, 即 $k \cdot \log_2(1.024 \times 10^9) - k \cdot \log_2 10^6 = k \cdot \log_2 1\,024 = 10k = 20$, 解得 $k = 2$, 则 $T = 2 \log_2 N$. 所以当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时, 训练时间增加 $2 \log_2(4.096 \times 10^9) - 2 \log_2(1.024 \times 10^9) = 2 \log_2 4 = 4$ h, 故选 B.

专题 抽象函数问题



题型上分练

1. C 【解析】由题意知 $\begin{cases} f(-2) = -f(2), \\ f(-2) = f(2), \end{cases}$ 故 $f(-2) = f(2) = 0$. 又

$f(3) = f(-1) = -f(1)$, $f(4) = f(0) = 0$ (提示: 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数的图象过原点), 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$, 则 $f(1) + f(2) + \dots + f(2\,026) = 506 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2) = f(1)$, 故 $f(1) = 2$. 故选 C.

2. D 【解析】由题意可得 $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$, 用 $x+1$ 代替 x 可得 $f(x+3) = f(x+2) - f(x+1)$, 两式相加化简得 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数, 所以 $f(11) = f(5) = 3$.

又 $f(5) = -f(2)$, 所以 $f(2) = -3$, 所以 $f(3) = f(2) - f(1) = -3 - 2 = -5$, 所以 $f(2\,025) = f(337 \times 6 + 3) = f(3) = -5$. 故选 D.

3. D 【解析】因为 $f(x) = f(4-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象的对称轴方



程是 $x=2$, 则 $b=f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$.

因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(x)=f(4-x)=-f(-x)$, 则 $f(x+4)=-f(x)$, 则 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数,

所以 $c=f(-13)=f(3)=f(1)$.

因为 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增, 所以 $b=f\left(\frac{1}{2}\right)<c=f(1)<$

$a=f\left(\frac{7}{4}\right)$. 故选 D.

4. C 【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)+f(2-x)=0$, 所以 $f(-x+2)=-f(x)$, 且 $f(1)+f(1)=0$, 即 $f(1)=0$.

因为函数 $f(x+2)$ 为偶函数, 所以 $f(x+2)=f(-x+2)=-f(x)$.

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的

关键点

周期函数.

所以 $f(2\ 025)=f(4\times 506+1)=f(1)=0$, $f(2\ 026)=f(4\times 506+2)=f(2)=1$.

故 $f(2\ 025)+f(2\ 026)=0+1=1$. 故选 C.

5. C 【解析】设 $g(x)=xf(x)$, 由 $f(x)$ 为奇函数可知 $g(x)$ 为偶函数(提示: 奇函数 $\times$ 奇函数=偶函数). 因为对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1-x_2)[x_1f(x_1)-x_2f(x_2)]<0$, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x)$ 单调递减(提示: 函数单调性的定义), 由对称性可知 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

因为 $f(1)=2$, 所以 $g(1)=2$, 所以 $g(-1)=2$.

当 $x>0$ 时, $f(x)>\frac{2}{x}$, 即 $xf(x)>2$, 即 $g(x)>g(1)$, 由单调性可知 $0<x<1$;

当 $x<0$ 时, $f(x)>\frac{2}{x}$, 即 $xf(x)<2$, 即 $g(x)<g(-1)$, 由单调性可得 $x<-1$.

综上, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. 故选 C.

6. A 【解析】由 $g(x)=2-f(2-x)$ 得 $g(2-x)=2-f(x)$, 又函数 $f(x)$ 是偶函数,

则 $g(2+x)=2-f(-x)=2-f(x)$. 又 $f(x)=g(x+4)-4$, 因此 $g(2+x)=2-[g(x+4)-4]=6-g(x+4)$, 即 $g(2+x)+g(x+4)=6$ ①.

于是 $g(x)+g(x+2)=6$ ②, ①-②可得 $g(x+4)=g(x)$, 则 $g(1)+g(3)=6, g(2)+g(4)=6, g(x)$ 的周期为 4,

由 $g(x)=2-f(2-x)$ 及 $f(0)=1$, 得 $g(2)=2-f(0)=1, g(6)=g(2)=1$,

由 $g(2-x)=2-f(x)$ 及 $f(x)=g(x+4)-4$, 得 $g(2-x)+g(x+4)=6$, 则 $g(1)+g(5)=6$, 而 $g(5)=g(1)$, 因此 $g(5)=3$,

所以 $\sum_{k=1}^6 g(k)=[g(1)+g(3)]+[g(2)+g(4)]+g(5)+g(6)=6+6+3+1=16$.

7. ACD 【解析】选项中涉及函数值, 所以考虑用赋值法.

对于 A, 令 $x=y=1$, 由已知可得, $f(1)=f(1)+f(1)+2$, 解得 $f(1)=-2$.

令 $x=y=-1$, 由已知可得, $f(1)=-f(-1)-f(-1)+2$,

解得 $f(-1)=2$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $x=e, y=\frac{1}{e}$, 代入已知条件可得, $f(1)=\frac{1}{e}f(e)+$



$$ef\left(\frac{1}{e}\right)+2=-2.$$

又 $f(e)=-e^2$, 所以有 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{4}{e}+1$, 故 **B** 错误;

对于 C, 令 $y=-1$, 代入已知条件可得 $f(-x)=-f(x)+xf(-1)-2x$.
因为 $f(-1)=2$, 所以 $f(-x)=-f(x)+2x-2x=-f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数, 故 **C** 正确;

对于 D, 令 $x=y=0$, 代入已知有 $f(0)=0$. $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{4}{e}+1<0$.

令 $x=y=\frac{1}{e}$, 由 $f(xy)=yf(x)+xf(y)+2xy$ 可得,

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{2}{e}f\left(\frac{1}{e}\right)+\frac{2}{e^2}=\frac{2}{e}\left(-\frac{4}{e}+1\right)+\frac{2}{e^2}=\frac{2}{e}-\frac{6}{e^2}.$$

令 $x=\frac{1}{e}, y=\frac{1}{e^2}$, 由 $f(xy)=yf(x)+xf(y)+2xy$ 可得,

$$f\left(\frac{1}{e^3}\right)=\frac{1}{e}f\left(\frac{1}{e^2}\right)+\frac{1}{e^2}f\left(\frac{1}{e}\right)+\frac{2}{e^3}=\frac{1}{e^2}\left(-\frac{4}{e}+1\right)+\frac{1}{e}\left(\frac{2}{e}-\frac{6}{e^2}\right)+\frac{2}{e^3}=\frac{3e-8}{e^3}>0.$$

因为函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 且

$$f\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f\left(\frac{1}{e^3}\right)<0, \text{ 根据零点存在定理, 可知 } \exists x_0 \in \left(\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e}\right),$$

使得 $f(x_0)=0$. 又 $f(x)$ 为奇函数, 可知 $f(-x_0)=0$, 所以函数 $f(x)$ 至少存在 3 个零点, 故 **D** 正确. 故选 ACD.

- 8. C** 【解析】二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 对应的抽象函数为 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2axy-c$. 由题可知 $a=1, c=-1$, 所以函数可以表示为 $f(x)=x^2+bx-1$. 又 $f(-2)=1$, 所以 $b=1$, 所以 $f(x)=x^2+x-1$, 所以 $f(2n)=4n^2+2n-1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 故选 C.

一题多解

令 $x=y=0$, 则 $f(0)=f(0)+f(0)+1$, 所以 $f(0)=-1$.

令 $x=y=-1$, 则 $f(-2)=f(-1)+f(-1)+2+1=2f(-1)+3=1$, 所以 $f(-1)=-1$.

令 $x=1, y=-1$, 则 $f(0)=f(1)+f(-1)-2+1=f(1)-2=-1$, 所以 $f(1)=1$.

令 $x=n, y=1, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $f(n+1)=f(n)+f(1)+2n+1=f(n)+2n+2$, 所以 $f(n+1)-f(n)=2n+2$,

则当 $n \geq 2$ 时, $f(n)-f(n-1)=2n$,

$$\text{则 } f(n)=f(n)-f(n-1)+f(n-1)-f(n-2)+\cdots+f(2)-f(1)+f(1)=2n+(2n-2)+\cdots+4+1=\frac{(2n+4)(n-1)}{2}+1=n^2+n-1$$

($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 当 $n=1$ 时, 上式也成立,

所以 $f(n)=n^2+n-1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 所以 $f(2n)=4n^2+2n-1$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 故选 C.

- 9. ABD** 【解析】由题意可设 $f(x)=\tan \omega x$,

因为 $f(1)=1$, 所以 $\tan \omega=1$, 所以 $\omega=\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以

$$f(x)=\tan \left[\left(\frac{\pi}{4}+k\pi \right) x \right], k \in \mathbf{Z}.$$

对于 A, $f(0)=\tan 0=0$, 故 **A** 正确.

对于 B, $f(-x)=\tan \left[-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi \right) x \right]=-\tan \left[\left(\frac{\pi}{4}+k\pi \right) x \right]=$



$-f(x), k \in \mathbf{Z}$, 故 **B** 正确.

对于 C, $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)x \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k \in \mathbf{Z}, k_1 \in \mathbf{Z}$, 故 $f(x)$ 的定义域不为 $\mathbf{R}$, 故 **C** 错误.

对于 D, $f(x)$ 的最小正周期 $T_k = \frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{4} + k\pi\right|} = \frac{4}{|4k+1|}, k \in \mathbf{Z}$, 对

$\forall k \in \mathbf{Z}, \exists k_0 = |4k+1| \in \mathbf{Z}$, 使得周期 $T = k_0 T_k = 4$, 即 $f(x)$ 的周期为 4, 故 **D** 正确.

一题多解

令 $x=1, y=0$, 则 $f(1) = \frac{f(1)+f(0)}{1-f(1)f(0)}$, 即 $1 =$

$\frac{1+f(0)}{1-f(0)}$, 解得 $f(0)=0$, **A** 正确;

令 $x=y=1$, 则 $f(2) = \frac{f(1)+f(1)}{1-1}$ 无意义, 即 $f(x)$ 的定义域不为 $\mathbf{R}$, **C** 错误;

由 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 可知 $f(x)f(y) \neq 1$, 令 $y=-x$, 则

$f(0) = \frac{f(x)+f(-x)}{1-f(x)f(-x)}$, 即 $f(x)+f(-x)=0$, 故 $f(-x)=-f(x)$,

B 正确;

令 $y=1$, 则 $f(x+1) = \frac{f(x)+1}{1-f(x)}$, 则 $f(x+2) = \frac{f(x+1)+1}{1-f(x+1)} =$

$\frac{\frac{f(x)+1}{1-f(x)}+1}{1-\frac{f(x)+1}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)}$, 故 $f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = f(x)$, 即 $f(x)$

的周期为 4, **D** 正确. 故选 **ABD**.

- 10. D** 【解析】函数 $f(x)=kx+2(k \neq 0)$ 符合题意, 又 $f(1)=4$, 所以 $k=2$, 所以 $f(x)=2x+2$. 若存在 $x \in [1, 2]$, 使得 $f(ax^2-4x)+f(2x)=1$, 即存在 $x \in [1, 2]$, 使得 $2(ax^2-4x)+2+2 \cdot 2x+2=1$, 即存在 $x \in [1, 2]$, 使得 $2ax^2-4x+3=0$, 即 $2a = \frac{4x-3}{x^2}$ 在 $x \in [1, 2]$ 时有解. 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 则 $2a = -3t^2+4t = -3\left(t-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$ 在 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时有解, 所以 $2a \in \left[1, \frac{4}{3}\right]$, 则 $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$. 故选 **D**.

一题多解

任取 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$. 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 2$, 于是 $f(x_2 - x_1) > 2$.

又 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$, 因此 $f(x_2) = f[x_1 + (x_2 - x_1)] = f(x_1) + f(x_2 - x_1) - 2 > f(x_1)$, 则函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增.

而 $f(ax^2-4x)+f(2x) = f[(ax^2-4x)+2x] + 2 = f(ax^2-2x) + 2 = 1$, 于是 $f(ax^2-2x) = -1$.

令 $x=y=0$, 得 $f(0)=2$; 令 $x=1, y=-1$, 得 $f(-1)=0$; 令 $x=-1, y=-1$, 得 $f(-2)=-2$; 令 $x=-2, y=-1$, 得 $f(-3)=-4$;

令 $x=y=-\frac{3}{2}$, 得 $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$, 即有 $f(ax^2-2x) =$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)$, 因此 $ax^2-2x = -\frac{3}{2}$. 原问题可转化为 $2a = \frac{4x-3}{x^2}$



在 $x \in [1, 2]$ 时有解, 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 则 $2a = -3t^2 + 4t = -3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$ 在 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时有解, 所以 $2a \in \left[1, \frac{4}{3}\right]$, 则 $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$. 故选 D.

11. D 【解析】 $\because f(x) - f(4-x) = 4x - 8$, 两边求导得 $f'(x) + f'(4-x) = 4$, $\therefore g(x) + g(4-x) = 4$, 则 $g(x)$ 的图象关于点 $(2, 2)$ 对称. 又 $\because g(x+1)$ 为偶函数, $\therefore g(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 则 $g(1+x) = g(1-x)$, 即 $g(x) = g(2-x)$, 由 $g(x) + g(4-x) = 4$, 可得 $g(x) = 4 - g(4-x)$, $\therefore g(2-x) = 4 - g(4-x)$, 可得 $g(x) = 4 - g(x+2)$, 即 $g(x) = 4 - [4 - g(x+2+2)] = g(x+4)$, 可知 $g(x)$ 的周期为 4.

当 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$ 时, $g(2k+1) = g(4n+1) = g(1)$,

当 $k = 2n+1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $g(2k+1) = g(4n+3) = g(3)$.

$\because g(x) + g(4-x) = 4$, $\therefore g(1) + g(3) = 4$, $\therefore g(4n+1) + g(4n+3) = 4, n \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \sum_{k=0}^{2025} g(2k+1) = [g(1) + g(3)] + [g(5) + g(7)] + \cdots + [g(4049) + g(4051)] = \frac{2026}{2} \times 4 = 4052$. 故选 D.

12. ABD 【解析】由 $g(x)$ 是偶函数, 得 $g(-x) = g(x)$, 两边求导得 $-g'(-x) = g'(x)$, 所以 $g'(x)$ 是奇函数, 故 $g'(0) = 0$.

对于 A, $f(x) + g'(x) - 8 = 0$, 则 $f(x-2) + g'(x-2) - 8 = 0$, 即 $f(x-2) = 8 - g'(x-2)$, 代入 $f(x-2) - g'(6-x) - 8 = 0$, 得 $8 - g'(x-2) - g'(6-x) - 8 = 0$.

又 $g'(x)$ 是奇函数, 则 $g'(x-2) = -g'(6-x) = g'(x-6)$, 则 $g'(x+6-2) = g'(x+6-6)$, 即 $g'(x+4) = g'(x)$,

所以 $g'(x)$ 是周期函数, 且周期为 4, $g'(4) = g'(0) = 0$, 故 A 正确.

对于 B, 由 $f(x) + g'(x) - 8 = 0$, 得 $f(1) + g'(1) - 8 = 0$, 由 $f(x-2) - g'(6-x) - 8 = 0$, 得 $f(3) - g'(1) - 8 = 0$, 故 $f(1) + f(3) = 16$, 故 B 正确.

对于 C, 令 $x = 2023$, 得 $f(2023) + g'(2023) - 8 = 0$, 即 $f(2023) + g'(4 \times 505 + 3) - 8 = 0$,

即 $f(2023) + g'(3) - 8 = 0$. 若 $f(2023) = 8$, 则 $g'(3) = 0$, 即 $g'(3) = g'(-1+4) = g'(-1) = 0$, 但 $g'(-1)$ 不一定为 0, 故 C 错误.

对于 D, 令 $x = 4$, 得 $f(4) + g'(4) - 8 = f(4) + g'(0) - 8 = 0$, 故 $f(4) = 8$, 又 $g'(2) = g'(2-4) = g'(-2) = -g'(2)$, 所以 $g'(2) = 0$. 令 $x = 2$, 得 $f(2) + g'(2) - 8 = 0$, 则 $f(2) = 8$, 又 $f(1) + f(3) = 16$, $g'(x)$ 是以 4 为周期的函数, $f(x) + g'(x) - 8 = 0$,

所以 $\sum_{n=1}^{20} f(n) = 5[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = 5 \times (8 + 16 + 8) = 160$, 故 D 正确. 故选 ABD.

真题风向练

13. ABD 命题点 ①利用赋值法解决抽象函数问题

【解析】令 $x = \frac{1}{2}, y = 0$, 则有 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) \times$



$[1+f(0)]=0$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, 故 $1+f(0)=0$, 则 $f(0)=-1$,

令 $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$, 则有 $f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 即 $f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$, 由 $f(0)=-1$, 可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, 故 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, 故 **A** 正确;

令 $y=-\frac{1}{2}$, 则有 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4x \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 即 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$, 所以 $f\left(-x-\frac{1}{2}\right)=2x=-f\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 又 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是奇函数, 故 **C** 错误;

因为 $f\left(x+1-\frac{1}{2}\right)+f(x+1) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)$, 即 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x-2$, 所以函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是减函数, 令 $x=0$, 有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$, 故 **B, D** 正确. 故选 **ABD**.

第2章 ▶ 真题综合测试

题组 1

1. C 必刷题型 ⊙ 分段函数问题

【解析】由题意可知, 当 $x \leq 0$ 时, $0 < 2^x \leq 1$, 故 $f(x) = 1 - 2^x < 1$, 满足题意; 当 $x > 0$ 时, $x+1 > 1$, 令 $\log_3(x+1) \leq 1$, 即 $1 < x+1 \leq 3$, 解得 $0 < x \leq 2$. 综上, $x \leq 2$. 故选 **C**.

2. B 命题点 ⊙ 函数奇偶性的判断

【解析】 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}$. 对于 **A** 选项, $f(x-1)-1 = \left[-1 + \frac{2}{(x-1)+1}\right] - 1 = \frac{2}{x} - 2$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 为非奇非偶函数, 不符合题意; 对于 **B** 选项, $f(x-1)+1 = \left[-1 + \frac{2}{(x-1)+1}\right] + 1 = \frac{2}{x}$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 则函数 $y = \frac{2}{x}$ 为奇函数, 符合题意; 对于 **C** 选项, $f(x+1)-1 = \left[-1 + \frac{2}{(x+1)+1}\right] - 1 = \frac{2}{x+2} - 2$, 定义域为 $\{x | x \neq -2\}$, 为非奇非偶函数, 不符合题意; 对于 **D** 选项, $f(x+1)+1 = \left[-1 + \frac{2}{(x+1)+1}\right] + 1 = \frac{2}{x+2}$, 定义域为 $\{x | x \neq -2\}$, 为非奇非偶函数, 不符合题意. 故选 **B**.

快解

$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}$. 函数 $f(x)$ 的图象是由 $y = \frac{2}{x}$ 的图象向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度得到的, 则其对称中心为 $(-1, -1)$. 结合选项知 $f(x-1)+1$ 图象的对称中心为 $(0, 0)$, 故选 **B**.

**3. B 命题点** ①函数的奇偶性、函数图象的识别

【解析】令函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x, x \in [-2.8, 2.8]$,
 因为 $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x) \sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x = f(x)$,
 所以函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 排除选项 A, C.

令 $x = 1$, 则 $f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1$.

因为 $1 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $\sin 1 \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又 $e \approx 2.7$, 所以 $e - \frac{1}{e} > 2$, 所以 $\left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1 > \sqrt{2}$,

所以 $f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1 > 0$, 排除选项 D, 故选 B.

4. D 命题点 ①对数运算

【解析】由题意可得
$$\begin{cases} 2.1 = \frac{S-1}{\ln N_1}, \\ 3.15 = \frac{S-1}{\ln N_2}, \end{cases}$$

两式相除得 $2.1 \ln N_1 = 3.15 \ln N_2$,

即 $\ln N_1^{2.1} = \ln N_2^{3.15}$, 所以 $N_1^{2.1} = N_2^{3.15}$, 结合选项可知, 选 D.

5. D 命题点 ①函数奇偶性与单调性的判断

【解析】对于 A, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于坐标原点对称

(提示: 讨论函数奇偶性的前提是函数定义域关于坐标原点对称),

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 错误;

对于 C, $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于坐标原点对称, 由 $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$, 得 $f(x)$ 是奇函数, 而 $f(x) = \sin x$ 是周期函数, 在 $\mathbf{R}$ 上有增有减, 因此 $f(x)$ 不在定义域上单调递增, 故 C 错误;

对于 B, 易知 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = 2^x - 2^{-x} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 又 $y = 2^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, $y = 2^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 所以 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故 B 错误;

对于 D, 由 $\frac{5+x}{5-x} > 0$, 得 $-5 < x < 5$, 所以函数 $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 的定义

域关于坐标原点对称, 因为 $f(-x) = \ln \frac{5-x}{5+x} = -\ln \frac{5+x}{5-x} = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是奇函数,

因为 $g(x) = \frac{5+x}{5-x} = -1 + \frac{10}{5-x}$ 在 $(-5, 5)$ 上单调递增, $f(t) = \ln t$

在定义域上单调递增, 所以 $f(x) = \ln(g(x))$ 在 $(-5, 5)$ 上单调递增(关键: 复合函数的单调性满足“同增异减”), 故 D 正确. 故选 D.

6. B 命题点 ①抽象函数的性质

【解析】由 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$ 知
 $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) > f(2) + f(1) = 3, f(4) > f(3) + f(2) > 3 + 2 = 5,$
 $f(5) > f(4) + f(3) > 5 + 3 = 8, f(6) > f(5) + f(4) > 8 + 5 = 13,$
 $f(7) > f(6) + f(5) > 13 + 8 = 21, f(8) > f(7) + f(6) > 21 + 13 = 34,$
 $f(9) > f(8) + f(7) > 34 + 21 = 55, f(10) > f(9) + f(8) > 55 + 34 = 89,$
 没有推出 $f(10) > 100$, 故 A 错误;



以此类推,类似斐波那契数列,

$f(11) > f(10) + f(9) > 89 + 55 = 144$, $f(12) > f(11) + f(10) > 144 + 89 = 233$, $f(13) > f(12) + f(11) > 233 + 144 = 377$, $f(14) > f(13) + f(12) > 377 + 233 = 610$, $f(15) > f(14) + f(13) > 610 + 377 = 987$, $f(16) > f(15) + f(14) > 987 + 610 = 1\,597 > 1\,000$, 则 $f(20) > f(16) > 1\,000$, 故 **B** 正确;

由 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$ 知 $f(x)$ 取比 $f(x-1) + f(x-2)$ 大的数, 所以 $f(x)$ 无最大值, 故 **C, D** 错误. 故选 **B**.

7. ACD 命题点 ①函数新定义问题、函数单调性的判断、指数幂的运算

【解析】对 A: 令 $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 则 $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ 恒成立, 故双曲正弦函数是增函数, 故 **A** 正确;

对 B: 令 $g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 则 $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 由 A 知, $g'(x)$ 为增函数, 又 $g'(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$, 故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 **B** 错误;

对 C: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$ (提示:

分子分母同乘 e^x , 这也是解决此类问题的常用方法), 由 $y = e^{2x} + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $y = e^{2x} + 1 > 1$, 得 $\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$ 是增函数, 故 **C** 正确;

对 D: 由 C 知 $\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, 则 $\tanh(x+y) = \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1}$,

$$\begin{aligned} \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} &= \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}}{1 + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}} \\ &= \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} + 1) + (e^{2y} - 1)(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1) + (e^{2x} - 1)(e^{2y} - 1)} \\ &= \frac{e^{2x+2y} + e^{2x} - e^{2y} - 1 + e^{2x+2y} - e^{2x} + e^{2y} - 1}{e^{2x+2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1 + e^{2x+2y} - e^{2x} - e^{2y} + 1} = \frac{2e^{2x+2y} - 2}{2e^{2x+2y} + 2} = \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1}, \text{ 故} \end{aligned}$$

$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$, 故 **D** 正确. 故选 ACD.

8.1 命题点 ②指数、对数运算

【解析】 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} + \log_2 \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$.

9.2 命题点 ③根据函数的奇偶性求参数

【解析】 $\because f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (x-1)^2 + ax + \cos x$,

$\therefore f(-x) = (-x-1)^2 - ax + \cos(-x) = (x+1)^2 - ax + \cos x$.

由于 $f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(x) = f(-x)$,

$\therefore (x-1)^2 + ax + \cos x = (x+1)^2 - ax + \cos x$, 即 $4x = 2ax$, $\therefore a = 2$.



快解

$\because f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (x-1)^2 + ax + \cos x$ 为偶函数, $\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, 即 $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2 + a \times \frac{\pi}{2} + 0 = \left(-\frac{\pi}{2}-1\right)^2 - a \times \frac{\pi}{2} + 0$, 解得 $a=2$.

题组 2

1. D 命题点 ①函数的奇偶性

【解析】因为函数 $f(x) = \frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数, 且定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 所以 $f(-x) = f(x)$, 即 $\frac{xe^x}{e^{ax}-1} = \frac{-xe^{-x}}{e^{-ax}-1}$, 即 $\frac{xe^x}{e^{ax}-1} = \frac{-xe^{-x} \cdot e^{ax}}{1-e^{ax}} = \frac{-xe^{ax-x}}{1-e^{ax}} = \frac{xe^{ax-x}}{e^{ax}-1}$, 所以 $a-1=1$, 即 $a=2$, 故选 D.

一题多解

因为函数 $f(x)$ 是偶函数, 且定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 所以 $f(-1) = f(1)$, 即 $\frac{-e^{-1}}{e^{-a}-1} = \frac{e}{e^a-1}$, 即 $\frac{e^{a-1}}{e^a-1} = \frac{e}{e^a-1}$, 所以 $a-1=1$, 即 $a=2$. 故选 D.

2. D 命题点 ①指数函数的单调性

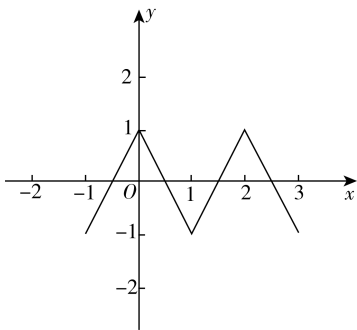
【解析】若 $a^s > a$, 则当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 单调递减, 所以 $s < 1$; 当 $a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 单调递增, 所以 $s > 1$. 所以当 $0 < a < 1$, 且 $s < 0$ 时, $a^s > a$ 成立, 符合题意. 故选 D.

3. C 命题点 ①函数图象的识别

【解析】对于 A, 当 $x=1$ 时, $f(1) = 1 - \sin \pi = 1 > 0$, 不符合题意; 对于 B, 当 $x=1$ 时, $f(1) = 1 + \sin \pi = 1 > 0$, 不符合题意; 对于 C, 当 $x=1$ 时, $f(1) = \sin \pi - 1 = -1$, 符合题意; 对于 D, 当 $x=1$ 时, $f(1) = \sin \pi = 0$, 不符合题意. 故选 C.

4. A 命题点 ①利用函数的周期性与奇偶性求函数值

【解析】由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数可得, $f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}+2\right) = f\left(\frac{11}{4}\right)$. 因为当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 5-2x$, 所以 $f\left(\frac{11}{4}\right) = 5-2 \times \frac{11}{4} = -\frac{1}{2}$, 即 $f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$. 故选 A.



5. D 命题点 ①对数运算、图象判断

【解析】对于 A 选项, 当 $T=220, P=1\ 026$ 时, $\lg P = \lg 1\ 026 > \lg 10^3 = 3$, 根据题图可知, 二氧化碳处于固态; 对于 B 选项, 当 $T=270, P=128$ 时, $\lg P = \lg 128 \in (2, 3)$, 根



据题图可知,二氧化碳处于液态;

对于 C 选项,当 $T=300, P=9\,987$ 时, $\lg P = \lg 9\,987 < \lg 10^4 = 4$, 且 $\lg P$ 接近于 4, 根据题图可知,二氧化碳处于固态;

对于 D 选项,当 $T=360, P=729$ 时, $\lg P = \lg 729 \in (2, 3)$, 根据题图可知,二氧化碳处于超临界状态. 故选 D.

6. D 命题点 ①函数的零点, 导数与函数的极值、最值

【解析】方法一: $\because f(x) = a(x+1)^2 - 1, g(x) = \cos x + 2ax$, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个交点, 令 $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 - \cos x + a - 1$, $\therefore h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个零点. 又易知 $h(x)$ 为 $(-1, 1)$ 上的偶函数, $\therefore h(0) = 0$, 即 $a - 2 = 0$, $\therefore a = 2$. 故选 D.

方法二: 当 $a = -1$ 时, $f(x) - g(x) = -x^2 - \cos x - 2$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f(x) - g(x) < 0$, $\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上没有交点, 故 A 错误.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x - \frac{1}{2}$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} < 0, -\cos x < 0$, $\therefore f(x) - g(x) < 0$, $\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上没有交点, 故 B 错误.

当 $a = 1$ 时, $f(x) - g(x) = x^2 - \cos x$, 令 $m(x) = f(x) - g(x)$, 则 $m(x)$ 为偶函数, 且在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增. 又 $m(0) = -1 < 0, m(1) = 1 - \cos 1 > 0, m(-1) = 1 - \cos 1 > 0$, 由函数零点存在定理可知 $m(x)$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上各有 1 个零点, 即曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有 2 个交点, 故 C 错误.

当 $a = 2$ 时, $f(x) - g(x) = 2x^2 - \cos x + 1$. 令 $n(x) = f(x) - g(x)$, 则 $n(x)$ 为偶函数, 且在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增. 又 $n(0) = 0$, $\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上只有 1 个交点, 故 D 正确. 故选 D.

方法三: $\because f(x) = a(x+1)^2 - 1, g(x) = \cos x + 2ax$, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个交点, 令 $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 - \cos x + a - 1$, $\therefore h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个零点. $h'(x) = 2ax + \sin x$, 令 $m(x) = 2ax + \sin x$, 则 $m'(x) = 2a + \cos x$,

当 $a \geq -\frac{\cos 1}{2}$ 时, $m'(x) > 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立, 则 $h'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增. 又 $h'(0) = 0$, $\therefore$ 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $h(x)$ 单调递减; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x)$ 单调递增, $\therefore h(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 也是最小值, $\therefore h(0) = 0$, 即 $a - 2 = 0$, $\therefore a = 2$.

$-1 < -\frac{\cos 1}{2}$, 下面分析 $a = -1$ 时曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 的交点情况. 当 $a = -1$ 时, $f(x) - g(x) = -x^2 - \cos x - 2$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f(x) - g(x) < 0$, $\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上没有交点. 结合选项可知, D 正确.

7. B 必刷题型 ②指数函数、对数函数的实际应用

【解析】 已知工时递减速率 $s = 80\% = 0.8$, 且 $\alpha = -\log_2 s$, 所以 $\alpha = -\log_2 0.8 = -\log_2 \frac{4}{5} = \log_2 \frac{5}{4}$,

由于生产前四件产品的平均工时为 $y_4 = k \cdot 4^{-\alpha}$,

生产前两件产品的平均工时为 $y_2 = k \cdot 2^{-\alpha}$,



$$\text{所以 } \frac{y_4}{y_2} = \frac{k \cdot 4^{-\alpha}}{k \cdot 2^{-\alpha}} = \left(\frac{4}{2}\right)^{-\alpha} = 2^{-\alpha}, \text{ 将 } \alpha = \log_2 \frac{5}{4} \text{ 代入, 可得 } 2^{-\alpha} = 2^{-\log_2 \frac{5}{4}} = \frac{4}{5} = 0.8,$$

则生产前四件产品与生产前两件产品的平均工时之比为 0.8.

8. B 必刷题型 ⊙ 抽象函数问题

【解析】由 $f(x+4) + f(x) = 0$ 得 $f(x) = -f(x+4)$, 则 $f(x+4) = -f(x+8)$, 所以 $f(x) = f(x+8)$, 即 $f(x)$ 是周期为 8 的函数.

由 $f(x+2)$ 为奇函数, 可知 $f(-x+2) = -f(x+2)$, 则 $f(-x) = -f(x+4)$, 所以 $f(-x) = f(x)$, 又 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

故 $f(-1) = f(1) = 1$, 则 $f(3) = f(5) = -1$, $f(7) = 1$, 结合周期性, 可知对于 $k \in \mathbf{N}^*$, $f(2k-1)$ 依次为 $1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, \dots$, 所以

关键点

$f(2k-1)$, $k \in \mathbf{N}^*$ 是周期为 4 的函数,

$$\text{则 } f(1) + 2f(3) + 3f(5) + 4f(7) = 1 - 2 - 3 + 4 = 0,$$

$$5f(9) + 6f(11) + 7f(13) + 8f(15) = 5 - 6 - 7 + 8 = 0,$$

$\dots$,

$$13f(25) + 14f(27) + 15f(29) + 16f(31) = 13 - 14 - 15 + 16 = 0,$$

$$17f(33) + 18f(35) + 19f(37) + 20f(39) = 17 - 18 - 19 + 20 = 0,$$

$\dots$.

易知当 $n < 19$ 时, $\sum_{k=1}^n kf(2k-1) > -20$, 当 $n = 19$ 时, $\sum_{k=1}^n kf(2k-1) = -20$. 所以正整数 n 的最小值为 19. 故选 B.

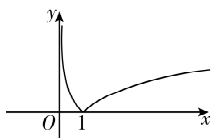
9. 64 命题点 ⊙ 对数方程的求解

【解析】因为 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$, 所以 $(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 6) = 0$. 又 $a > 1$, 故 $\log_2 a = 6$, 解得 $a = 64$.

题组 3

1. A 命题点 ⊙ 比较大小问题、对数函数的图象与性质

【解析】由题知, $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 其大致图象如图所示.



示. 若 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 < x_2$), 则 $-\ln x_1 =$

$\ln x_2$, 即 $\ln(x_1 x_2) = 0$, 故 $x_1 x_2 = 1$, 则 $f(3^{-0.5}) = f(3^{0.5})$, 易知 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $1 < 2^{0.3} < 3^{0.3} < 3^{0.5}$, 所以 $f(2^{0.3}) < f(3^{0.3}) \leq f(3^{0.5}) = f(3^{-0.5})$, 即 $a < b < c$. 故选 A.

2. D 命题点 ⊙ 复合函数的单调性

【解析】因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 所以函数 $y = x(x-a) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减 (提示: 复合函数的单调性

遵循“同增异减”原则), 所以 $\frac{a}{2} \geq 1$, 解得 $a \geq 2$, 即 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$, 故选 D.

3. C 必刷题型 ⊙ 判断函数的图象

【解析】由题意, $x \in [-\pi, \pi]$ 关于原点对称, 又 $f(-x) = [1 - \cos(-x)] \sin(-x) = -(1 - \cos x) \sin x = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数, 排除 B;

又 $x \in [0, \pi]$ 时, $1 - \cos x \geq 0$, $\sin x \geq 0$, 所以 $f(x) = (1 - \cos x) \cdot$



$\sin x \geq 0$, 排除 A;

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f'(x) = \sin^2 x + (1 - \cos x) \cos x = -2\cos^2 x + \cos x + 1 = (2\cos x + 1)(-\cos x + 1)$,

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $-\cos x + 1 \geq 0$, 所以当 $0 < x < \frac{2\pi}{3}$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2\pi}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 上单调递减, 排除 D, 故选 C.

4. D 命题点 函数的基本性质

【解析】因为 $f(x+1)$ 是奇函数, $x \in \mathbf{R}$, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 且 $f(1) = 0$. 由 $f(x+2)$ 是偶函数, 得 $f(-x+2) = f(x+2)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $f(x) = -f(-x+2) = -f(x+2)$, 所以 $f(x) = f(x+4)$, 所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数. 又 $f(0) = -f(2) = -4a - b$, $f(3) = f(1) = a + b = 0$, 所以 $f(0) + f(3) = -3a = 6$, 所以 $a = -2$, $b = 2$, 所以 $f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$, 故选 D.

5. x^2 (答案不唯一) 命题点 函数的奇偶性和单调性、导数的应用

【解析】由条件②可知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 由条件③可知, $f(x)$ 可能为偶函数, 再结合条件①, 可构造函数 $f(x) = x^2$ 等.

6. 命题点 集合新定义的理解与转化、指数函数的单调性、抽象函数单调性的判定、反证法的高阶应用

(1) 【解】当 $x_0 = -1$ 时, $f(x_0) = f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

当 $d < 1$ 时, $x_0 + d = -1 + d < 0$, $f(x_0 + d) > f(x_0)$, 即 $f(-1 + d) > f(-1)$, 即 $2^{-1+d} > \frac{1}{2}$, 解得 $d > 0$, 故 $0 < d < 1$;

当 $d \geq 1$ 时, $x_0 + d = -1 + d \geq 0$, $f(x_0 + d) > f(x_0)$, 即 $f(-1 + d) > f(-1)$, 即 $1 - (-1 + d) > \frac{1}{2}$, 解得 $d < \frac{3}{2}$, 故 $1 \leq d < \frac{3}{2}$.

综上, $D(-1) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$ 3 分

(2) 【证明】第一步: 求出奇函数的解析式及对应的集合 $D(x)$.

若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -2^{-x}, & x > 0. \end{cases}$ $f(x_0 + d)$ 可看作 $x = x_0$

对应的点向左 ($d < 0$) 或向右 ($d > 0$) 移动 $|d|$ 个单位长度后对应的函数值. 5 分

当 $x_0 < 0$ 时, 只有向右移到区间 $(x_0, 0)$ 内, 函数值才会变大, 故 $D(x_0) = (0, -x_0)$ 6 分

当 $x_0 > 0$ 时, 若移动到 x 轴非正半轴, 则函数值变为非负数, 一定大于原来的负数; 若仍在正半轴内, 则结合指数型函数的单调性可知只有右移才能使函数值增大, 故 $D(x_0) =$



$(-\infty, -x_0] \cup (0, +\infty)$ 7 分

第二步:根据 x_1, x_2 的范围,分情况讨论证明包含关系.

若 $x_1, x_2 < 0$, 则根据 $2^{x_1} \leq 2^{x_2}$, 可得 $x_1 \leq x_2 < 0$, 故 $(0, -x_2) \subseteq (0, -x_1)$, 即 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

若 $x_1, x_2 > 0$, 则根据 $-2^{-x_1} \leq -2^{-x_2}$, 可得 $0 < x_1 \leq x_2$,

故 $(-\infty, -x_2] \subseteq (-\infty, -x_1]$, 可得 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$; 8 分

若 $x_1 > 0, x_2 < 0$, 则 $D(x_2) = (0, -x_2) \subseteq (0, +\infty) \subseteq D(x_1)$;

若 $x_1 < 0, x_2 > 0$, 此时 $f(x_1) > 0 > f(x_2)$, 不满足 $f(x_1) \leq f(x_2)$.

综上, $D(x_2) \subseteq D(x_1)$ 10 分

(3)【证明】为避免与前两问混淆,将本问的两个条件记为

①条件 A: $f(s) \leq f(t) \Rightarrow D(t) \subseteq D(s)$, ②条件 B: $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < f(0)$.

(i) 利用反证法,证明 $f(0) \geq 1$.

反设 $f(0) < 1$. 取 $\log_2 f(0) < u < 0$, 则 $f(0) < 2^u = f(u)$,

再取 $0 < h < \min\{-u, 1\}$.

由 $u+h < 0, f(u+h) = 2^{u+h} > 2^u = f(u)$, 即 $h \in D(u)$.

又 $f(0) < f(u)$, 由条件 A 得 $D(u) \subseteq D(0)$,

所以 $h \in D(0)$, 即 $f(h) > f(0)$ 11 分

又 $0 < h < 1$, 由条件 B 得 $f(h) < f(0)$, 矛盾, 故 $f(0) \geq 1$ 12 分

(ii) 第一步:证明引理 1: 对任意 $h > 0$, 若 $f(x) < 2^{-h}$, 则 $f(x+h) > f(x)$.

取 $u < -h$, 使 $f(x) < 2^u = f(u) < 2^{-h} = f(-h)$.

因为 $u+h < 0$, 所以 $f(u+h) = 2^{u+h} > 2^u = f(u)$, 即 $h \in D(u)$,

又 $f(x) < f(u)$, 由条件 A 得 $D(u) \subseteq D(x)$,

所以 $h \in D(x)$, 即 $f(x+h) > f(x)$ 13 分

第二步:证明引理 2: 对任意 $h > 0$, 若 $f(x) > 0$, 则 $f(x-h) \leq f(x)$.

取 $u < 0$, 使 $f(u) = 2^u \leq f(x)$.

因为 $u-h < u < 0$, 所以 $f(u-h) = 2^{u-h} < 2^u = f(u)$, 即 $-h \notin D(u)$.

由 $f(u) \leq f(x)$ 和条件 A 得 $D(x) \subseteq D(u)$,

因此 $-h \notin D(x)$, 从而 $f(x-h) \leq f(x)$ 14 分

第三步:先证明当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) \leq 0$.

当 $0 < t < 1$ 时, 若 $f(t) > 0$, 由引理 2 有 $f(t-h) \leq f(t)$,

取 $h=t$, 得 $f(0) \leq f(t)$, 与条件 B 矛盾,

因此当 $0 < t < 1$ 时, $f(t) \leq 0$ 15 分

第四步:证明对任意 $x > 0, f(x) \leq 0$.

若存在 $a > 0$, 使 $f(a) > 0$,

由引理 2 有 $f(a-h) \leq f(a)$ 对任意 $h > 0$ 恒成立, 取 $h=a$, 得 $f(0) \leq f(a)$,

结合(i)可知 $f(a) \geq 1$.

取 $0 < t < \min\{a, 1\}$, 再取 $u < 0$, 令 $v=t-a+u$.

因为 $t < a$, 所以 $v < u < 0$.

又 $f(a) \geq 1 > 2^u = f(u)$, 令 $d=a-u$,

则 $f(u+d) = f(a) > f(u)$, 所以 $d \in D(u)$.

同时 $f(v) = 2^v < 2^u = f(u)$,

由条件 A 得 $D(u) \subseteq D(v)$, 于是 $d \in D(v)$,

从而 $f(v+d) > f(v)$.

但 $v+d=t$, 所以 $f(t) > f(v) = 2^v > 0$.



这与前面已证的 $0 < t < 1$ 时 $f(t) \leq 0$ 矛盾.

因此当 $x > 0$ 时, $f(x) \leq 0$ 16 分

第五步:综合上述结论,利用定义法证明单调性.

任取 $0 < x_1 < x_2$, 令 $h = x_2 - x_1 > 0$,

则 $f(x_1) \leq 0 < 2^{-h}$,

由引理 1 得 $f(x_1 + h) > f(x_1)$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$.

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 17 分

一题多解 (2) 第一步:求出 $f(x)$ 的解析式.

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = -f(-x) = -2^{-x}$ 5 分

第二步:根据 x 的正负性及 $f(x)$ 的解析式, 求出 $D(x)$.

①当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, 所以 $D(x) = (0, -x)$;

②当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递增, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 所以 $D(x) = (-\infty, -x] \cup (0, +\infty)$ 7 分

第三步:根据 x_1, x_2 的正负与大小关系分类讨论并证明 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$.

① x_1, x_2 异号:若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则必有 $x_1 > 0, x_2 < 0$, 进一步可知 $f(x_1) < 0 \leq f(x_2)$, 所以 $D(x_2) = (0, -x_2) \subseteq (0, +\infty) \subseteq D(x_1)$;

② x_1, x_2 同号且 $x_1 < 0, x_2 < 0$:若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则 $x_1 \leq x_2$, 所以 $D(x_2) = (0, -x_2) \subseteq (0, -x_1) = D(x_1)$;

③ x_1, x_2 同号且 $x_1 > 0, x_2 > 0$:若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则 $x_1 \leq x_2$, 所以 $D(x_2) = (-\infty, -x_2] \cup (0, +\infty) \subseteq (-\infty, -x_1] \cup (0, +\infty) = D(x_1)$.

综上, $D(x_2) \subseteq D(x_1)$ 10 分

(3) (i) 第一步:运用反证法, 判断 $D(x_0)$ 与 $D(0)$ 的关系.

假设 $f(0) < 1$. $\exists x_0 \in (-1, 0)$, 使得 $f(x_0) = 2^{x_0} > f(0)$, 则由条件①知 $D(x_0) \subseteq D(0)$.

第二步:取 $x = -\frac{x_0}{2}$, 推出与题目条件矛盾的结论.

又因为 $\frac{x_0}{2} \in (-1, 0)$, $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left[x_0 + \left(-\frac{x_0}{2}\right)\right] = 2^{\frac{x_0}{2}} > 2^{x_0} =$

$f(x_0)$, 由 $D(x)$ 的定义可知 $-\frac{x_0}{2} \in D(x_0)$, 则 $-\frac{x_0}{2} \in D(0)$,

所以 $f\left(0 - \frac{x_0}{2}\right) = f\left(-\frac{x_0}{2}\right) > f(0)$, 与条件②矛盾, 故假设不成立. 所以 $f(0) \geq 1$ 12 分

(ii) 第一步:证明 $\forall x \in (0, 1), f(x) \leq 0$.

假设 $\exists x \in (0, 1), f(x) > 0$, 则 $\exists y \in (-\infty, 0), f(y) < f(x) < f(0) = f[x + (-x)]$, 所以 $-x \in D(x) \subseteq D(y)$, 所以 $f(y - x) > f(y)$, 又 $y - x < y < 0$, 故这与 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增矛盾.

故假设不成立, 所以 $\forall x \in (0, 1), f(x) \leq 0$ 13 分

第二步:证明 $\forall x > 0, f(x) \leq 0$.

假设 $\exists x > 0, f(x) > 0$, 则 $x \in [1, +\infty)$. $\exists y \in (-\infty, 0), f(y) < f(x) = f[y + (x - y)]$, 所以 $x - y \in D(y)$. 令 $0 < t < 1 \leq x$, $t - (x - y) = y + (t - x) < y < 0$, 则 $0 < f[t - (x - y)] < f(y)$, 所以 $D(y) \subseteq D(t - (x - y))$, 所以 $x - y \in D(t - (x - y))$, $f(t) = f[t - (x - y) + (x - y)] > f[t - (x - y)] > 0$, 与第一步证明的结论矛盾, 所以 $\forall x > 0, f(x) \leq 0$ 15 分



第三步:任取 $x_2 > x_1 > 0$, 证明 $x_2 - x_1 \in D(x_1)$.

任取 $x_2 > x_1 > 0$, $-(x_2 - x_1) - 1 < -1 < 0$, 由 $f(x_1) \leq 0 < f[-(x_2 - x_1) - 1]$ 可得 $D(-(x_2 - x_1) - 1) \subseteq D(x_1)$.

由 $f[-(x_2 - x_1) - 1] < f(-1) = f[-(x_2 - x_1) - 1 + (x_2 - x_1)]$, 可得 $x_2 - x_1 \in D(-(x_2 - x_1) - 1)$, 所以 $x_2 - x_1 \in D(x_1)$.

第四步:证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x_2) = f[x_1 + (x_2 - x_1)] > f(x_1)$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 17 分